

Homotopie rationnelle d'espaces fibres

THÈSE

*présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences, mention mathématiques*

par
Flavio Ernesto AZEREDO DA SILVEIRA
du Brésil

Thèse N° 1918

GENÈVE
Imprimerie Nationale
1979

Homotopie rationnelle d'espaces fibres

THÈSE

*présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences, mention mathématiques*

par
Flavio Ernesto AZEREDO DA SILVEIRA
du Brésil

Thèse N° 1918

GENÈVE
Imprimerie Nationale
1979

La Faculté des sciences, sur le préavis de Messieurs A. HAEFLIGER, professeur ordinaire et directeur de thèse, C. WEBER, professeur ordinaire (Section de mathématiques - Genève), O. BURLET, professeur (Université de Lausanne) et D. HUSEMOLLER, professeur (Haverford College) autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 18 juin 1979

Le Doyen:
Bernard LEVRAT

Thèse N° 1918



HOMOTOPIE RATIONNELLE D'ESPACES FIBRES

Table des matières

INTRODUCTION .

1. DEFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS .

2. MODULES ET COMODULES F^2 -LIBRES ET SUITES SPECTRALES .

3. FIBRES .

4. FIBRES DONT LA FIBRE EST DE DIMENSION FINIE EN CHAQUE
DEGRE ET DG-COALGEBRES SUR UNE DG-ALGEBRE .

5. LES FONCTEURS $\mathcal{C}_A$ ET $\mathcal{L}_A$ DE QUILLEN .

6. UN DICTIONNAIRE .

7. UN MODELE POUR L'ESPACE DES SECTIONS .

8. QUESTIONS DE FINITUDE .

I N T R O D U C T I O N

La théorie de l'homotopie rationnelle d'un espace, telle qu'elle a été développée par QUILLEN [12] et par SULLIVAN [14], établit l'équivalence entre les catégories suivantes localisées relativement aux équivalences rationnelles (morphismes qui induisent un isomorphisme sur l'homologie rationnelle) :

(1) la catégorie des espaces topologiques 1-connexes et tels que l'homologie rationnelle soit de dimension finie en chaque degré ;

(2) la catégorie des DG-algèbres A (algèbres sur $\mathbb{Q}$ différentielles associatives et commutatives) de dimension finie en chaque degré et telles que $A^p = 0$ si $p < 0$ ou $p = 1$ et $A^0 = \mathbb{Q}$;

(3) la catégorie des DG-coalgèbres C (coalgèbres sur $\mathbb{Q}$ différentielles associatives et commutatives) de dimension finie en chaque degré et telles que $C^p = 0$ si $p < 0$ ou $p = 1$ et $C_0 = \mathbb{Q}$;

(4) la catégorie des DG-algèbres de Lie L (algèbres de Lie sur $\mathbb{Q}$ différentielles) de dimension finie en chaque degré et telles que $L_p = 0$ si $p \leq 0$.

Dans l'équivalence entre (1) et (2) on peut en fait supposer plus généralement que les espaces soient nilpotents, que les DG-algèbres A soient telles que $A^p = 0$ si $p < 0$ et $A^0 = \mathbb{Q}$ et qu'elles admettent un modèle libre minimal nilpotent.

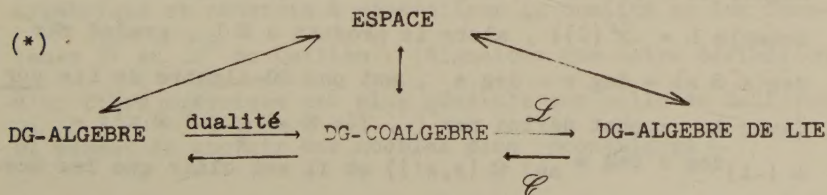
L'équivalence entre (2) et (3) est donnée simplement par dualité .

Dans [12] , Quillen établit l'équivalence entre (1) et (3) (en composant en fait une chaîne de plusieurs équivalences) et montre que si X est dans (1) et L lui correspond dans (3), alors $H(L)$ est une algèbre de Lie graduée isomorphe à l'homotopie rationnelle de l'espace des lacets ΩX sur X munie de la structure d'algèbre de Lie graduée définie par le produit de Whitehead.

L'équivalence entre (3) et (4) est établie dans l'appendice B de [12] . Quillen y montre que le complexe de Koszul des chaînes d'une algèbre de Lie se généralise et définit un foncteur $\mathcal{C}$ de (4) dans (3) . Le foncteur $\mathcal{L}$ de (3) dans (4) , inverse à $\mathcal{C}$ sur les catégories localisées, est défini en faisant correspondre à une DG-coalgèbre C la DG-algèbre de Lie des éléments primitifs de la cobar-construction ΩC sur C .

Récemment, NEISENDORFER [11] a montré que la théorie de Quillen s'étend aux espaces nilpotents (et dont l'homologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré).

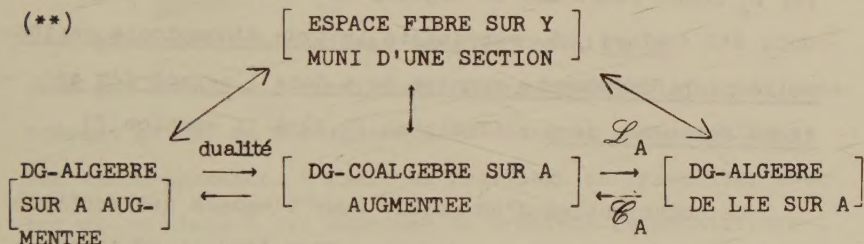
Ces équivalences constituent ainsi un dictionnaire pour le type d'homotopie rationnelle d'espaces 1-connexes . On peut représenter ce dictionnaire par le diagramme suivant :



D'autre part, si Y est un espace nilpotent et A une DG-algèbre qui lui correspond dans $(*)$, c'est une conséquence [7] de la théorie du modèle minimal de Sullivan qu'il y a une équivalence entre les catégories localisées des deux catégories suivantes : (1)' la catégorie des fibrés de Serre $p : X \longrightarrow Y$ tels que la fibre Z soit 1-connexe, son homologie soit de dimension finie et $\pi_1(Y)$ agisse trivialement sur $\pi_n(Z)$, $n \geq 2$; et (2)' la catégorie des DG-algèbres E de la forme $E = A \otimes_{\tau} F$, où F est une DG-algèbre de dimension finie en chaque degré et telle que $F^p = 0$ si $p < 0$ et $p = 1$, $F^0 = Q$, et où τ est la dérivation de $A \otimes F$ telle que la différentielle sur E s'écrive $d = d_A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_F + \tau$ et telle que $\tau(A \otimes F) \subset \bigoplus_{p \geq 2} A^p \otimes F$. (La localisation se fait relativement aux morphismes sur Y , respectivement sur A , qui induisent un isomorphisme en homologie). Si p est un fibré trivial, i.e. $X = YXZ$, alors on peut choisir $E = A \otimes F$ muni de la différentielle $d_A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_F$. Si $C = F^*$ est la DG-coalgèbre duale, alors le produit $A \otimes C$, gradué par $\deg(a \otimes c) = \deg c - \deg a$, est une DG-coalgèbre sur A et il est clair que si $f : C' \longrightarrow C$ est un morphisme de DG-coalgèbres induisant un isomorphisme en homologie, alors $\text{id} \otimes f : A' \otimes C' \longrightarrow A \otimes C$ est un morphisme de DG-coalgèbres sur A induisant un isomorphisme en homologie. Aussi, si L est une DG-algèbre de Lie qui représente Z (par exemple $L = \mathcal{L}(C)$), alors le produit $A \otimes L$, gradué par $\deg(a \otimes x) = \deg x - \deg a$, est une DG-algèbre de Lie sur A (avec le crochet défini par $[,](a \otimes x) \otimes (a' \otimes x') = \underset{A}{[a, a']} \otimes [x, x']$) et il est clair que les mor-

phismes $L' \longrightarrow L$ induisant un isomorphisme en homologie s'étendent en des morphismes sur A ayant la même propriété .

Dans ce travail nous voulons montrer qu'en fait le dictionnaire (*) se généralise en un dictionnaire pour le type d'homotopie rationnelle d'espaces fibrés sur un complexe simplicial fini Y , dictionnaire que l'on peut représenter par le diagramme suivant



où A est une DG-algèbre représentant le type d'homotopie rationnelle de Y . Le théorème (6.1) à la section 6 donne les conditions précises dans lesquelles nous avons l'existence d'un tel dictionnaire et la fonctorialité par rapport aux changements de base. En fait, comme nous l'avons mentionné, l'équivalence "Espace fibré sur Y $\longleftrightarrow$ DG-algèbre sur A" est une conséquence de la théorie du modèle minimal de Sullivan et est fonctorielle par rapport aux changements de base . La démonstration de l'existence de (**) est alors purement algébrique et consiste à généraliser la dualité et les foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ de Quillen . (Signalons que notre définition d'un fibré algébrique est plus générale que celle de Sullivan et permet de choisir des modèles plus économiques).

Soient $p : X \rightarrow Y$ un fibré muni d'une section $s: Y \rightarrow X$ et L une DG-algèbre de Lie sur A qui lui correspond dans (**). L contient en général des éléments non nuls de degrés négatifs. C'est le cas lorsque la connexité de la fibre de p est inférieure à la dimension de la base Y . Considérons la sous-DG-algèbre de Lie L_+ sur A de L formée des cycles de degré zéro et des éléments de degré > 0 . Par restriction des scalaires nous pouvons considérer L_+ comme étant une DG-algèbre sur $\mathbb{Q}$.

Alors, L_+ représente le type d'homotopie rationnelle de la composante connexe de s dans l'espace des sections continues de p . (Théorème (7.3) à la section 7).

La construction d'un modèle pour l'espace des sections Γ_p d'un fibré p a été suggérée par THOM [15] et SULLIVAN et le fait que cette construction représente effectivement le type d'homotopie rationnelle de Γ_p a été démontrée par HAEFLIGER (les références sont données à la section 7). Nous montrons à la section 7 que la DG-algèbre des cochaînes sur L_+ (DG-algèbre duale de la DG-coalgèbre $\mathcal{C}(L_+)$) est un modèle de la forme suggérée par Sullivan.

Ce travail est constitué de huit sections. Les sections 1, 2 et 3 donnent les définitions et décrivent les propriétés générales des objets dont nous avons besoin pour énoncer et démontrer ce qui est décrit ci-dessus.

La section 4 établit, dans certaines conditions, la dualité "DG-algèbre sur $A \xrightarrow{\quad} \text{DG-coalgèbres sur } A$ ".

Dans la section 5 les foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ de Quillen sont généralisés en des foncteurs $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{L}_A$ en vue de l'équivalence "DG-coalgèbre sur $A \xrightleftharpoons{\quad} \text{DG-algèbre de Lie sur } A"$.

Les sections 6 et 7 donnent les résultats de ce travail.

La section 8 est consacrée à trois questions de finitude qui se posent dans la théorie de l'homotopie rationnelle et qui sont formulées en tête de la section .

Les questions traitées dans ce travail m'ont été proposées par Monsieur le professeur André HAEFLIGER qui m'a constamment guidé, me prodiguant généreusement ses conseils et ses encouragements. C'était un privilège de travailler avec lui et je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance .

Je remercie les professeurs Dale HUSEMOLLER , Claude WEBER et Oscar BURLET qui ont accepté de faire partie du Jury de thèse . Je remercie également le professeur Michel KERVAIRE pour m'avoir montré l'exemple qui se trouve à la fin de la section 8, et le professeur Felice RONGA pour avoir démontré de quelle section géométrique provient la section algébrique non triviale de l'exemple 4 à la section 6 .

Je remercie enfin Madame Andrée DALL'AGLIO qui a dactylographié ce manuscrit avec grandes efficacité et sollicitude .

1 . DEFINITIONS , NOTATIONS ET RAPPELS .

Corps de base : partout dans la suite K désigne un corps de caractéristique zéro .

DG-espace vectoriel : c'est un espace vectoriel sur K gradué $V = (V_p)$, où p parcourt l'ensemble des entiers négatifs et positifs, muni d'une différentielle, i.e. d'une application linéaire $d : V \longrightarrow V$ de degré -1 telle que $d^2 = 0$.

Convention sur la graduation : nous convenons que $V^p = V_{-p}$.

DG-algèbre : c'est un DG-espace vectoriel A supérieurement et positivement gradué muni d'un produit $m : A \otimes A \longrightarrow A$ associatif et commutatif (au sens gradué) qui soit un morphisme de DG-espaces vectoriels (la différentielle sur $A \otimes A$ étant $d \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d$) et d'une unité $u : K \longrightarrow A$ qui soit aussi un morphisme de DG-espaces vectoriels telle que $m(u \otimes \text{id}) = \text{id}$. On dira que A est augmentée s'il existe un morphisme de DG-espaces vectoriels $\epsilon : A \longrightarrow K$ tel que $\epsilon u = \text{id}$.

DG-coalgèbre : c'est un DG-espace vectoriel C inférieurement et positivement gradué muni d'un coproduit $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ coassociatif et cocommutatif (au sens gradué) qui soit un morphisme de DG-espaces vectoriels et d'une co-unité $\epsilon : C \longrightarrow K$ qui soit aussi un morphisme de DG-espaces vectoriels telle que $(\epsilon \otimes \text{id}) \Delta = \text{id}$. On dira que C est augmentée s'il existe un morphisme de DG-espaces vectoriels $\eta : K \longrightarrow C$ tel que $\epsilon \eta = \text{id}$.

Le dual $C^* = \text{Hom}(C, K)$ d'une DG-coalgèbre C est une DG-algèbre avec le produit défini par $C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$.

Si A est une DG-algèbre de dimension finie en chaque degré,

alors le dual A^* est une DG-algèbre avec le coproduit défini par $A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xleftarrow{\sim} A^* \otimes A^*$.

DG-algèbre de Lie : c'est un DG-espace vectoriel L inférieurement et positivement gradué muni d'un crochet $[,] : L \otimes L \longrightarrow L$ anticommutatif et vérifiant l'identité de Jacobi (au sens gradué)..

DG-morphismes : on définit de la façon évidente les morphismes de DG-espaces vectoriels, de DG-algèbres, de DG-coalgèbres et de DG-algèbres de Lie.

Quasi-isomorphisme et équivalence : on dira qu'un DG-morphisme $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme en homologie. Une suite finie de quasi-isomorphismes $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longleftarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow \dots \longleftarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}'$ est une équivalence entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. (On obtient ainsi la relation d'équivalence engendrée par les quasi-isomorphismes).

Quasi-isomorphisme de morphismes et équivalence : soient $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ et $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ deux DG-morphismes. On dira que f et g sont quasi-isomorphes s'il existe un couple de quasi-isomorphismes $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ et $\alpha' : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{F}'$ (ou $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $\alpha' : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{E}'$) tels que $g\alpha = \alpha'f$ (resp. $f\alpha = \alpha'g$). On dira que f et g sont deux morphismes équivalents s'il existe une suite finie $h_1, \dots, h_n$ de morphismes quasi-isomorphes telle que $f = h_1$ et $g = h_n$. C'est la relation d'équivalence engendrée par les quasi-isomorphismes entre morphismes.

DG-modules sur une DG-algèbre : soit A une DG-algèbre. Un DG-module/ A est un DG-espace vectoriel M muni d'un morphisme de DG-espaces vectoriels $m : A \otimes M \longrightarrow M$ tel que $m(m_A \otimes \text{id}) = m(\text{id} \otimes m)$ et $m(u \otimes \text{id}) = \text{id}$, où m_A est le produit dans A et u l'unité dans A . Remarquons que d'après la convention sur la

graduation, si $a \in A^p$ et $x \in M_q$, alors $ax = m(a \otimes x) \in M_{q-p}$.

DG-comodules sur une DG-coalgèbre : soit C une DG-coalgèbre. Un DG-comodule/ C est un DG-espace vectoriel M muni d'un morphisme de DG-espaces vectoriels $\Delta : M \longrightarrow C \otimes M$ tel que $(\text{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta_C \otimes \text{id})\Delta$ et $(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$, où Δ_C et ε sont respectivement le coproduit et la co-unité de C .

DG-morphisme sur un DG-morphisme : on définit de manière évidente les morphismes de DG-modules et les morphismes de DG-comodules. Soient $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres, M un DG-module/ A et M' un DG-module/ A' . On peut considérer M' comme un DG-module/ A en posant $a.x' = f(a)x'$, $a \in A$, $x' \in M'$. On dira que $\alpha : M \longrightarrow M'$ est un morphisme de DG-modules sur f si α est un morphisme de DG-modules/ A .

Soient $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres, M' un DG-comodule/ C' et M un DG-comodule/ C . On peut considérer M' comme DG-comodule/ C en posant $\Delta x' = (\text{id} \otimes f)\Delta x'$, $x' \in M'$. On dira que $\alpha : M' \longrightarrow M$ est un morphisme de DG-comodules sur f si α est un morphisme de DG-comodules/ C .

Opérations sur les DG-modules sur une DG-algèbre. Rappelons que si V et W sont deux DG-espaces vectoriels, alors $\text{Hom}(V, W)$ est le DG-espace vectoriel gradué par $\text{Hom}(V, W)_p = \prod_r \text{Hom}(V_r, W_{r+p})$ et dont la différentielle est définie par $(df)(v) = d_w(f(v)) - (-1)^{\deg f} f(d_v v)$.

Soient A une DG-algèbre et M, N deux DG-modules/ A .

On désigne par $\text{Hom}_A(M, N)$ le sous-DG-module/ A de $\text{Hom}(M, N)$ formé des $f \in \text{Hom}(M, N)$ tels que $f(ax) = (-1)^{\deg f \deg a} af(x)$, $a \in A$, $x \in M$.

On désigne par $M \otimes_A N$ le DG-module $/A$ qui rend exacte la suite

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes A \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ x \otimes a \otimes y & \longmapsto & (-1)^{\deg x \deg a} ax \otimes y - x \otimes ay & & & & \end{array}$$

Opérations sur les DG-comodules sur une DG-coalgèbre .

Soient C une DG-coalgèbre et $A = C^*$ la DG-algèbre duale.

Soient M et N deux DG-comodules/ C .

Le DG-espace vectoriel $\text{Hom}(M, N)$ est naturellement muni d'une structure de DG-module/ A définie par $(a \cdot f)(x) = (a \otimes f) \Delta x$, $a \in A$, $f \in \text{Hom}(M, N)$, $x \in M$.

On désigne par $\text{Hom}^C(M, N)$ le sous-DG-module/ A de $\text{Hom}(M, N)$ formé des $f \in \text{Hom}(M, N)$ tels que $\Delta f = (\text{id} \otimes f) \Delta$.

On désigne par $M \square_C N$ le sous-DG-comodule/ C de $M \otimes N$ rendant exacte la suite

$$0 \longrightarrow M \square_C N \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id} - \text{id} \otimes \Delta} M \otimes C \otimes N .$$

DG-algèbre sur une DG-algèbre .

Soit A une DG-algèbre . On dira que E est une DG-algèbre/ A si c'est un DG-module/ A muni de deux morphismes de DG-module/ A $m : E \otimes_A E \longrightarrow E$ et $u : A \longrightarrow E$ tels que $m(\text{id} \otimes m) = m(m \otimes \text{id})$

(associativité) , $m(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \deg y} m(y \otimes x)$ (commutativité) et $m(u \otimes \text{id}) = \text{id}$. Nous supposons toujours que $E^p = 0$ si $p < 0$.

Lemme : Soit A une DG-algèbre. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) E est une DG-algèbre/ A ;
- (2) E est une DG-algèbre munie d'un morphisme $A \longrightarrow E$ de DG-algèbres ; et
- (3) E est une DG-algèbre munie d'une structure de DG-module/ A telle que $A \otimes E \longrightarrow E$ soit un morphisme de DG-algèbres.

La démonstration se fait directement à l'aide des définitions.

On dira qu'une DG-algèbre E sur A est augmentée s'il existe un morphisme de DG-algèbres $\eta : E \longrightarrow A$ tel que $\eta u = \text{id}$.

On définit aussi les morphismes de DG-algèbres sur une DG-algèbre et les morphismes de DG-algèbres sur un morphisme de DG-algèbres.

Le produit tensoriel $E \otimes_A F$ de deux DG-algèbres E et F sur une DG-algèbre A est une DG-algèbre/ A .

Exemple : L'algèbre tensorielle . Soient A une DG-algèbre et M un DG-module/ A . Désignons par $\bigotimes_A^n M$ le DG-module/ A obtenu en faisant le produit tensoriel sur A de M par lui-même n -fois. Par convention $\bigotimes_A^0 M = A$. On définit $T_A(M)$ comme étant le DG-module/ A tel que $T_A(M)_p$ soit formé des éléments qui s'expriment comme somme finie d'éléments de degré p de la forme

$x_1 \otimes_A x_2 \otimes_A \dots \otimes_A x_k \in \bigotimes_A^k M$ ($\deg x_1 + \dots + \deg x_k \leq p$) . En définissant $u : A \longrightarrow T_A(M)$ et $m : T_A(M) \otimes_A T_A(M) \longrightarrow T_A(M)$ pour

$u = \text{identité sur } \bigotimes_A^0 M$ et

$$m(x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_k) \otimes_A (y_1 \otimes_A \dots \otimes_A y_\ell) = x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_k \otimes_A y_1 \otimes_A \dots \otimes_A y_\ell$$

on a une structure de DG-algèbre/ A non-commutative. C'est la solution d'un problème universel analogue à celui que l'on a lorsque $A = K$.

DG-coalgèbres sur une DG-coalgèbre .

Soit C une DG-coalgèbre. On dira que E est une DG-coalgèbre/ C si c'est un DG-comodule sur C muni de deux morphismes de DG-comodules sur C $\Delta : E \longrightarrow E \square_C E$ et $\epsilon : E \longrightarrow C$ tels que $(\text{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \text{id})\Delta$ (associativité) , $T \Delta = \Delta$ (commutativité) où $T(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$ et $(\epsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$. Nous supposons toujours que $E_p = 0$ si $p < 0$.

Lemme : Soit C une DG-coalgèbre . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) E est une DG-coalgèbre/ C ;
- (2) E est une DG-coalgèbre munie d'un morphisme de DG-coalgèbres $E \longrightarrow C$; et
- (3) E est une DG-coalgèbre munie d'une structure de DG-comodule/ C telle que $E \longrightarrow C \otimes E$ soit un morphisme de DG-coalgèbres .

La démonstration est immédiate .

On définit aussi les morphismes de DG-coalgèbres sur une DG-coalgèbre et les morphismes de DG-coalgèbres sur un morphisme de DG-coalgèbres.

Le produit cotensoriel $E \square_C F$ de deux DG-coalgèbres E et F sur une DG-coalgèbre C est une DG-coalgèbre/ C .

Soient C une DG-coalgèbre, $A = C^*$ la DG-algèbre duale et E une DG-coalgèbre/ C . Alors le dual $E^* = \text{Hom}(E, K)$ est une DG-algèbre/ A avec le produit défini par $E^*_A \otimes E^*_A \longrightarrow \text{Hom}(E \square_C E, K) \xrightarrow{\Delta^*} E^*$

DG-algèbres de Lie sur une DG-algèbre .

Soit A une DG-algèbre . On dira que L est une DG-algèbre de Lie/ A si c'est un DG-module sur A muni d'un morphisme de DG-modules/ A $[\cdot, \cdot] : L \otimes_A L \longrightarrow L$ vérifiant les deux égalités habituelles :

$$\begin{aligned}
 [x, y] &= -(-1)^{\deg x \deg y} [y, x] \quad (\text{anticommutativité}) , \\
 [x, [y, z]] &= [[x, y], z] + (-1)^{\deg x \deg y} [y, [x, z]] \quad (\text{identité de Jacobi}) .
 \end{aligned}$$

Lemme : Soit A une DG-algèbre . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) L est une DG-algèbre de Lie/A
- (2) L est une DG-algèbre de Lie munie d'une structure de DG-module/A telle que $A \otimes L \longrightarrow L$ soit un morphisme de DG-algèbres de Lie, où $[a \otimes \ell, a' \otimes \ell'] = (-1)^{\deg a' \deg \ell} a a' \otimes [\ell, \ell']$.

La démonstration est immédiate.

On définit de la façon évidente les morphismes de DG-algèbres de Lie sur une DG-algèbre et les morphismes de DG-algèbres de Lie sur un morphisme de DG-algèbres.

Le produit tensoriel de deux DG-algèbres de Lie sur une DG-algèbre est une DG-algèbre de Lie sur la DG-algèbre .

Si $\mathcal{E}$ est une DG-algèbre non-commutative sur une DG-algèbre A, alors on définit sur $\mathcal{E}$ une structure non-triviale de DG-algèbre de Lie/A en posant $[x, y] = xy - (-1)^{\deg x \deg y} yx$.

Construction de la DG-algèbre de Lie libre sur un DG-module sur A .

Soient A une algèbre et M un A-module (on ignore momentanément les différentielles). On définit par récurrence sur $n \geq 1$ ([2], page 181. ex.13) un A-module $M_{(n)}$ en posant $M_{(1)} = M$ et $M_{(n)} = \bigoplus_{p+q=n} (M_{(p)} \otimes_A M_{(q)})$ si $n \geq 2$. Soit le A-module $\text{Lib}_A(M) = \bigoplus_{n \geq 1} M_{(n)}$. On définit un produit sur $\text{Lib}_A(M)$ en posant , pour $x_p \in M_{(p)}$ et $y_q \in M_{(q)}$, $x_p y_q = x_p \otimes y_q \in M_{(p+q)}$. Muni de ce produit $\text{Lib}_A(M)$ est appelé l'algèbre non-associative, non-

commutative libre sur M . C'est la solution du problème universel suivant : pour tout A -module $\mathcal{E}$ muni d'un produit et pour tout morphisme de A -modules $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{E}$, il existe un et un seul morphisme de A -modules compatible avec les produits $\Phi : \text{Lib}_A(M) \rightarrow \mathcal{E}$ dont la restriction à $M_{(1)} = M$ soit φ . (On définit Φ par récurrence en posant $\Phi(1) = \varphi$ et $\Phi(n) = \bigoplus_{p+q=n} \Phi(p) \otimes \Phi(q)$.)

Si $\Phi' : \text{Lib}_A(M) \rightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme de A -modules compatible avec les produits tel que $\Phi'(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in M$, alors si $x \in M_{(2)}$, x est une somme finie d'éléments de la forme $x'x''$, avec $x', x'' \in M$, et $\Phi'(x'x'') = \varphi(x')\varphi(x'') = \Phi(x'x'')$. Donc, par récurrence sur $n \geq 1$, $\Phi' = \Phi$).

Désignons par $\mathcal{I}$ l'idéal de $\text{Lib}_A(M)$ engendré par les éléments de la forme $xy + (-1)^{\deg x \deg y} yx$ et $x(yz) - (xy)z - (-1)^{\deg x \deg y} y(xz)$. Le quotient $L_A(M) = \text{Lib}_A(M) / \mathcal{I}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie sur A graduée. Soit $r : M \longrightarrow L_A(M)$ la restriction à M de la projection naturelle $\text{Lib}_A(M) \longrightarrow L_A(M)$. Le couple $(L_A(M), r)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre de Lie L sur A et tout morphisme de modules sur A $\varphi : M \longrightarrow L$ il existe un et un seul morphisme d'algèbres de Lie sur A graduées $L_A(\varphi) : L_A(M) \longrightarrow L$ tel que $L_A(\varphi) \circ r = \varphi$. En effet, il existe un unique morphisme de modules sur A compatible avec les produits $\Phi : \text{Lib}_A(M) \longrightarrow L$ tel que $\Phi|M = \varphi$ et qui passe au quotient car L est une algèbre de Lie sur A . De même l'unicité de $L_A(\varphi)$ est immédiate.

Soient M un A -module et L une algèbre de Lie/ A . On dit que M est un L -module s'il existe un morphisme de modules sur A $M \otimes_A L \longrightarrow M$, $x \otimes \ell \mapsto x\ell$, tel que $x[\ell, \ell'] = (x\ell)\ell' + (-1)^{\deg \ell \deg x} \ell(x\ell')$.

1.1 Proposition : Soient A une algèbre, M et N deux modules sur A et supposons que N soit muni d'une structure de $L_A(M)$ -module. Soit $d : M \longrightarrow N$ une application A -linéaire de degré r . Alors il existe une et une seule application A -linéaire $D : L_A(M) \longrightarrow N$ telle que $Dr = d$ et $D[x, x'] = (Dx)x' + (-1)^r \deg x \cdot x(Dx')$.

Démonstration : on copie la démonstration dans [3], page 25, en faisant attention aux signes.

1.2 Corollaire : Soient A une algèbre et M un A -module. Pour toute application $d : M \longrightarrow L_A(M)$ de degré r il existe une dérivation et une seule $d : L_A(M) \longrightarrow L_A(M)$ de degré r telle que $Dr = d$.

Soient A une DG-algèbre et M un DG-module/ A . D'après (1.2), en étendant $M \xrightarrow{d_M} M \xrightarrow{r} L_A(M)$ on obtient une dérivation de degré -1 $d : L_A(M) \longrightarrow L_A(M)$ telle que $dr = rd_M$. C'est une différentielle car $d^2r = drd_M = rd_M^2 = 0$ et donc $d^2 = 0$. Munie de cette différentielle, $L_A(M)$ est appelée la DG-algèbre de Lie libre sur le DG-module M sur A . C'est la solution du problème universel évident.

Remarque : Soient A une DG-algèbre et V un DG-espace vectoriel. En appliquant la propriété universelle, on voit que $L_A(A \otimes V) = A \otimes L_K(V)$, où le produit est muni du crochet défini par $[a \otimes \ell, a' \otimes \ell'] = (-1)^{\deg a' \deg \ell} a \otimes a' \otimes [\ell, \ell']$.

L'algèbre enveloppante d'une DG-algèbre de Lie sur une DG-algèbre.

Soient A une DG-algèbre et L une DG-algèbre de Lie/ A . L'algèbre enveloppante $U_A(L)$ sur L est obtenue en prenant

le quotient de $T_A(L)$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $\ell \otimes \ell' - (-1)^{\deg \ell \cdot \deg \ell'} \ell' \otimes \ell - [\ell, \ell']$. C'est la solution du problème universel analogue à celui que l'on a lorsque $A = K$.

Comme dans le cas où $A = K$, on montre en utilisant la propriété universelle que $\bigcup_A (L_A(M)) = T_A(M)$.

DG-coalgèbres sur une DG-algèbre.

Soit A une DG-algèbre. Une DG-coalgèbre/ A est un DG-module $\mathcal{X}$ sur A muni de deux morphismes de DG-modules/ A $\Delta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \otimes_A \mathcal{X}$ et $\varepsilon : \mathcal{X} \longrightarrow A$ tels que $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$ (associativité), $T\Delta = \Delta$ (commutativité) où $T(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \cdot \deg y} x \otimes y$ et $(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$. Nous supposons toujours que $(K \otimes_A \mathcal{X})_p = 0$ si $p < 0$.

On dira qu'une DG-coalgèbre $\mathcal{X}$ sur A est augmentée s'il existe un morphisme de DG-coalgèbre sur A $\eta : A \longrightarrow \mathcal{X}$ tel que $\varepsilon\eta = \text{id}$.

On définit de façon évidente les morphismes de DG-coalgèbres sur une DG-algèbre et les morphismes de DG-coalgèbres sur un morphisme de DG-algèbres.

Le produit tensoriel de deux DG-coalgèbres sur une DG-algèbre est une DG-coalgèbre sur cette DG-algèbre.

Si $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/ A , alors le DG-module sur A $\text{Hom}_A(\mathcal{X}, A)$ est naturellement muni d'une structure de DG-algèbre/ A , définie par $\varphi\psi = m(\varphi \otimes \psi)\Delta$, où $\Delta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \otimes_A \mathcal{X}$ et $m : A \otimes A \longrightarrow A$.

Exemple : La coalgèbre tensorielle et la coalgèbre symétrique.

Soient A une DG-algèbre et M un DG-module/ A . Alors $T_A(M)$ est natu-

rellement muni d'une structure de DG-coalgèbre non commutative

sur A , en posant $\Delta(x_1 \otimes_A x_2 \otimes_A \dots \otimes_A x_n) =$

$$= \sum_{i=0}^n (x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes_A \dots \otimes_A x_n), \text{ où } x_0 = 1 = x_{n+1},$$

et $\epsilon : T_A(M) \longrightarrow A$ est la projection sur $\bigotimes_A^0 M = A$.

Le groupe Σ_n de permutations de n objets agit de façon naturelle sur $\bigotimes_A^n M$: si $\sigma \in \Sigma_n$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$, on pose $\sigma \cdot x_1 \otimes_A x_2 \otimes_A \dots \otimes_A x_n = \pm x_{\sigma(1)} \otimes_A x_{\sigma(2)} \otimes_A \dots \otimes_A x_{\sigma(n)}$, où le signe est donné par la signature de la permutation induite par σ sur les x_i de degré impair (on "oublie" les x_i de degré pair et on regarde la permutation que l'on obtient sur les x_i de degré impair).

On désigne par $S_A(M)$ la sous-DG-coalgèbre/ A (commutative) de $T_A(M)$ formée des éléments $x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_n \in T_A(M)$ tels que

$\sigma \cdot x_1 \otimes_A \dots \otimes_A x_n = x_{\sigma(1)} \otimes_A \dots \otimes_A x_{\sigma(n)}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, pour tout n .

Q-connexité ("connexité au sens de Quillen").

Définition : [12] (page 282) : Soient A une DG-algèbre et $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A et supposons donnée une augmentation $\eta : A \longrightarrow \mathcal{X}$. Posons $\eta(1) = 1$. Considérons la filtration $F_n \mathcal{X}$ définie par récurrence de la façon suivante : $F_0 \mathcal{X} = A$ et pour $n > 0$, $F_n \mathcal{X} = \{ c \in C \mid \Delta c - c \otimes 1 - 1 \otimes c \in F_{n-1} \mathcal{X} \otimes F_{n-1} \mathcal{X} \}$. On a $F_0 \mathcal{X} \subset F_1 \mathcal{X} \subset \dots \subset F_n \mathcal{X} \subset \dots$. On dira que C est Q-connexe si $\mathcal{X} = \bigcup_n F_n \mathcal{X}$.

Exemples : (1) Si $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre sur A , libre comme A -module et si $K \otimes_A \mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre (avec la structure induite) augmentée, alors $\mathcal{X}$ est Q -connexe.

(2) La DG-coalgèbre/ A $S_A(M)$ symétrique sur un DG-module/ A M est Q -connexe [12] (page 283).

Les propriétés suivantes se démontrent en copiant les démonstrations de Quillen [12] (appendice B).

1.3 : Proposition : Soient A une DG-algèbre, M un DG-module/ A et $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A Q -connexe. Pour tout morphisme de DG-modules/ A $f : \mathcal{K} \longrightarrow M$ qui s'annule sur A (on identifie A à une sous-DG-coalgèbre/ A de $\mathcal{X}$ par l'augmentation) il existe un morphisme de DG-coalgèbres/ A et un seul $F : \mathcal{X} \longrightarrow S_A(M)$ tel que $jF = f$, où $j : S_A(M) \longrightarrow M$ est la projection naturelle.

Soient A une DG-algèbre, $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A et M un DG-module/ A muni d'un morphisme de DG-modules/ A $\Delta : M \longrightarrow M \otimes_A \mathcal{X}$ tel que $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$ et $(\text{id} \otimes \epsilon)\Delta = \text{id}$. Une codérivation d de M dans $\mathcal{X}$ de degré r est un morphisme de DG-modules/ A de degré r $d : M \longrightarrow \mathcal{X}$ tel que $\Delta \circ d = (d \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d)\Delta$.

1.4 : Corollaire : Soient A une DG-algèbre, M et N deux

DG-modules/ A . Supposons M muni d'un morphisme de DG-modules/ A $\Delta : M \longrightarrow M \otimes_A S_A(N)$ tel que

$(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta_{S_A(N)})\Delta$ et $(\text{id} \otimes \epsilon)\Delta = \text{id}$. Alors il

existe une correspondance biunivoque entre les morphismes de DG-modules/ A de degré r $f : M \longrightarrow N$ et les codérivations d de degré r de M dans $S_A(N)$ telles que $jd = f$.

La proposition suivante est démontrée dans [8] (page 521).
Elle découle de (1.3) et (1.4) .

Soient A une DG-algèbre et M un DG-module/ A . On désigne par $S_u : S_K(M) \longrightarrow S_A(M)$ le morphisme évident de DG-coalgèbres sur $u : K \longrightarrow A$.

1.5 : Proposition : (1) Soit d une différentielle sur $S_A(M)$

qui en fasse une DG-coalgèbre/ A . Il existe alors une différentielle d' unique sur $S_K(M)$ qui en fasse une DG-coalgèbre telle que S_u soit un morphisme de DG-coalgèbres sur $u : K \longrightarrow A$.

(2) Soit C une DG-coalgèbre (sur K) Q -connexe. Pour tout morphisme $f : C \longrightarrow S_A(M)$ sur $u : K \longrightarrow A$ il existe un morphisme unique de DG-coalgèbres $F : C \longrightarrow S_K(M)$ tel que $S_u F = f$.

(Remarquons que $S_K(M)$ est une DG-coalgèbre au sens général car elle peut avoir des éléments non nuls de degrés négatifs) .

2 . MODULES ET COMODULES F^2 -LIBRES ET SUITES SPECTRALES

Toute cette section est inspirée du lemme de la page 509 dans [8] .

Modules F^2 -libres

Filtration naturelle et définition de F^2 -libre . Soient A une DG-algèbre et M un DG-module/ A . Pour tout entier $p \geq 0$, soit $F^p A$ l'idéal de A formé des éléments de degré $\geq p$. Alors $F^p M = (F^p A)M$ est un sous-DG-module/ A et l'on obtient ainsi une filtration de M naturelle par rapport aux morphismes de DG-modules/ A : si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de DG-modules/ A , alors $f(F^p M) \subset F^p N$.

Supposons que A soit augmentée et que l'on a choisi une augmentation $\epsilon : A \longrightarrow K$. Soit M un DG-module/ A et supposons qu'il soit libre comme module sur A . A la donnée d'une base correspond un et un seul isomorphisme de modules sur A .

$$\varphi : A \otimes_A (K \otimes M) \xrightarrow{\sim} M ,$$

où K est muni de la structure de A -module donnée par l'augmentation. Désignons par V l'espace vectoriel gradué $K \otimes_A M$ muni de la différentielle d_V induite par celle de M . Alors l'application

$$\tau_\varphi : V \longrightarrow M$$

définie par $\tau_\varphi(v) = d_M \varphi(1 \otimes v) - \varphi(1 \otimes d_V v)$, est une application linéaire telle que si l'on identifie M à $A \otimes V$ par φ ,

alors
$$d_M(a \otimes v) = d_A a \otimes v + (-1)^{\deg a} (a \otimes d_V v + a \tau_\varphi v) ,$$

 $a \in A, v \in V .$

On dira que φ vérifie la condition (F^2) si $\tau_\varphi(v) \subset F^2 M$.

On dira que M est F^2 -libre sur A s'il est libre comme A -module et s'il existe un isomorphisme de A -modules
 $\varphi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ qui vérifie la condition (F^2) .

Si A est telle que $A^1 = 0$ et si M est libre comme module sur A , alors M est F^2 -libre sur A .

Suite spectrale .

2.1 Lemme : Soient A une DG-algèbre augmentée et M un DG-module/ A F^2 -libre sur A tel que $M^p = 0$ si $p < 0$.

Choisissons un isomorphisme $\varphi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ de A -modules vérifiant la condition (F^2) . Alors la suite spectrale associée à la filtration naturelle de M converge vers $H(M)$ et φ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E_2 \approx H(A) \otimes H(V)$.

2.2 Lemme : Soit A une DG-algèbre augmentée et supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que si $p > n$, alors $A^p = 0$. Soit M un DG-module/ A F^2 -libre sur A tel que $(K \otimes_A M)_p = 0$ si $p < 0$. Choisissons un isomorphisme $\varphi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ de A -modules vérifiant la condition (F^2) . Alors la suite spectrale associée à la filtration naturelle de M converge vers $H(M)$ et φ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E_2 \approx H(A) \otimes H(V)$.

Démonstration de (2.1) et de (2.2) : Si $M^p = 0$ lorsque $p < 0$, alors $(K \otimes_A M)^p = 0$ lorsque $p < 0$. La suite spectrale associée à la filtration de M est alors une suite spectrale du premier quadrant. Donc elle converge vers $H(M)$.

Si $A^p = 0$ lorsque $p > n \geq 0$ et $(K \otimes_A M)_p = 0$ lorsque $p < 0$, alors en posant $E_{p,q}^{r,r} = E_{p+n,q}^r$, on peut considérer la suite spectrale associée à la filtration de M comme étant une suite spectrale du premier quadrant. Donc elle converge vers $H(M)$.

D'autre part, il est clair que ϕ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E_0^p \approx A^p \otimes V$ tel que $d_0 = \text{id} \otimes d_V$, où d_V est la différentielle induite sur $V = K \otimes_A M$ par celle de M . Donc $E_1^p = A^p \otimes H(V)$. Comme ϕ vérifie la condition (F^2) , on a $d_1 = d_A \otimes \text{id}$, car si $a \otimes v \in A^{p-1} \otimes V$ avec $d_V v = 0$, alors $d_M \phi(a \otimes v) - \phi(d_A \otimes v) = (-1)^{\deg a} a \otimes \tau_\phi(v) \in F^{p+1} M$. D'où $E^2 \approx H(A) \otimes H(M)$.

Morphismes et comparaison de suites spectrales. Soient A et A' deux DG-algèbres augmentées et $f : A \longrightarrow A'$ un quasi-isomorphisme de DG-algèbres. Soient M un DG-module/ A , N un DG-module/ A' et $\phi : M \longrightarrow N$ un morphisme sur f . Par passage aux quotients α induit un morphisme de DG-espaces vectoriels $\alpha^K : V \longrightarrow W$ où $V = K \otimes_A M$ et $W = K \otimes_{A'} N$ munis des différentielles induites.

2.3. Corollaire : Avec les notations ci-dessus, supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :

$$(i) \quad M^p = N^p = 0 \quad \text{si } p < 0 ; \quad \text{ou}$$

$$(ii) \quad A^p = A'^q = 0 \quad \text{si } p > n \text{ et } q > m \text{ et } (K \otimes_A M)_r = \\ = (K \otimes_{A'} N)_r = 0 \quad \text{si } r < 0 .$$

Supposons que f soit un quasi-isomorphisme . Alors α est un quasi-isomorphisme si et seulement si α^K en est un .

Démonstration : Soient $\varphi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ et $\psi : A \otimes W \longrightarrow N$ des isomorphismes de modules respectivement sur A et A' . Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & N \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ A \otimes V & \xrightarrow{f \otimes \alpha^K} & A' \otimes W \end{array}$$

car α est un morphisme sur f et α^K est obtenu par passage aux quotients .

Supposons que φ et ψ satisfassent la condition (F^2) . Soit E_r la suite spectrale associée à la filtration naturelle de M et E'_r celle associée à la filtration de N . Alors, en appliquant le lemme (2.1) (si (i) est vérifiée) ou le lemme (2.2) (si (ii) est vérifiée) , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2 \approx H(A) \otimes H(V) & \xrightarrow{H(f) \otimes H(\alpha^K)} & H(A') \otimes H(W) \approx E'_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H(M) & \xrightarrow{H(\alpha)} & H(N) \end{array}$$

où les isomorphismes sur les termes E_2 et E'_2 sont induits respectivement par φ et ψ .

On applique alors le théorème de comparaison de Moore ([5], théorèmes A, B et C) pour conclure.

2.4 Corollaire : Soient A et A' deux DG-algèbres augmentées, M et M' deux DG-modules/ A F^2 -libres, N et N' deux DG-modules/ A' F^2 -libres. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :

$$(i) \quad M^p = M'^p = N^p = N'^p = 0 \text{ si } p < 0 ; \text{ ou}$$

$$(ii) \quad A^p = A'^q = 0 \text{ si } p > n, q > m \text{ et } (K \otimes_A M)_r = \\ = (K \otimes_A M')_r = (K \otimes_{A'} N)_r = (K \otimes_{A'} N')_r = 0 \text{ si } \\ r < 0.$$

Soient $f : A \longrightarrow A'$ un quasi-isomorphisme de DG-algèbres et $\alpha : M \longrightarrow N$, $\alpha' : M' \longrightarrow N'$ deux quasi-isomorphismes sur f . Alors

$$\alpha \otimes_f \alpha' : M \otimes_A M' \longrightarrow N \otimes_{A'} N' \text{ est un quasi-isomor-} \\ \text{phisme sur } f.$$

Démonstration : on considère un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A M' & \xrightarrow{\alpha \otimes \alpha'} & N \otimes_{A'} N' \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\ (A \otimes V) \otimes_A (A \otimes V') & & (A' \otimes W) \otimes_{A'} (A' \otimes W') \\ \parallel & & \parallel \\ A \otimes V \otimes V' & \xrightarrow{f \otimes \alpha^K \otimes \alpha'^K} & A' \otimes W \otimes W' \end{array}$$

et on applique le corollaire (2.3) .

2.5 Corollaire : Soient A une DG-algèbre augmentée et

$\alpha : M \longrightarrow N$ un quasi-isomorphisme de DG-modules/ A F^2 -libres tels que $K \otimes_A M$ et $K \otimes_A N$ soient de dimension finie en chaque degré . Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :

$$(i) \quad M^p = N^p = 0 \text{ si } p < 0, \text{ ou}$$

$$(ii) \quad A^p = 0 \text{ si } p > n \text{ et } (K \otimes_A M)_r = (K \otimes_A N)_r = 0 \\ \text{si } r < 0 .$$

Alors le morphisme naturel $\text{Hom}_A(N, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A)$, défini par $\varphi \longmapsto \varphi \alpha$, est un quasi-isomorphisme de DG-modules/ A .

Démonstration : Le corollaire découle de (2.3), compte tenu des égalités $\text{Hom}_A(A \otimes V, A) = \text{Hom}(V, A) = A \otimes \text{Hom}(V, K)$ si V est de dimension finie en chaque degré .

DG-algèbre de Lie/ A libre sur un DG-module/ A F^2 -libre .

Soient A une DG-algèbre augmentée, M un DG-module/ A F^2 -libre et $\varphi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ un isomorphisme de modules sur A vérifiant la condition (F^2) . φ induit un isomorphisme $L(\varphi) : A \otimes L(V) \longrightarrow L_A(M)$ d'algèbres de Lie/ A , obtenu en étendant par la propriété universelle le morphisme $A \otimes V \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{r} L_A(M)$. (Rappelons que $L_A(A \otimes V) = A \otimes L(V)$) .

Munissons $L_A(M)$ de la structure de $L(V)$ -module définie par $\xi \cdot \ell = [\xi, L(\varphi)\ell]$, $\xi \in L_A(M)$ et $\ell \in L(V)$. Considérons l'application linéaire $\tau' : V \longrightarrow L_A(M)$ obtenue en composant $\tau_\varphi : V \longrightarrow M$ avec $r : M \longrightarrow L_A(M)$. τ' s'étend (voir section 1) en une unique application linéaire $\tilde{\tau} : L(V) \longrightarrow L_A(M)$ telle que $\tilde{\tau}[\ell, \ell'] = (\tilde{\tau}\ell) \cdot \ell' + (-1)^{\deg \ell} \ell \cdot (\tilde{\tau}\ell')$. On a $\tilde{\tau}(L(V)) \subset F^2 L_A(M)$ car $\tau_\varphi(V) \subset F^2 M$ et donc $\tau'(V) \subset F^2 L_A(M)$. Or, on vérifie directement que l'application linéaire $\tau_{L(\varphi)} : L(V) \longrightarrow L_A(M)$ associée à $L(\varphi)$ est telle que $\tau_{L(\varphi)}[\ell, \ell'] = (\tau_{L(\varphi)}\ell) \cdot \ell' + (-1)^{\deg \ell} \ell \cdot (\tau_{L(\varphi)}\ell')$ et, pour $v \in V$,

$$\begin{aligned} \tau_{L(\varphi)}(v) &= dL(\varphi)(1 \otimes v) - L(\varphi)(1 \otimes d_V v) = dr\varphi(1 \otimes v) - r\varphi(1 \otimes d_V v) \\ &= r\tau\varphi(1 \otimes v) = \tau'(1 \otimes v). \end{aligned}$$

Par unicité, il en découle que $\tilde{\tau} = \tau_{L(\varphi)}$. En particulier, $L(\varphi)$ vérifie la condition (F^2) .

2.6 Corollaire : Soient A une DG-algèbre augmentée, M et N deux DG-modules/ A F^2 -libres tels que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :

- (i) $M^p = N^p = 0$ si $p < 0$;
- (ii) $A^p = 0$ si $p > n$ et $(K \otimes_A M)_r = (K \otimes_A N)_r = 0$ si $r < 0$.

Si $f : M \longrightarrow N$ est un quasi-isomorphisme de DG-modules/ A , alors $L_A(f) : L_A(M) \longrightarrow L_A(N)$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres de Lie/ A .

Démonstration : Soient $\phi : A \otimes V \xrightarrow{\sim} M$ et $\psi : A \otimes W \longrightarrow N$ des isomorphismes de modules sur A satisfaisant la condition (F^2) . Ils induisent des isomorphismes d'algèbres de Lie sur A , $L(\phi) : A \otimes L(V) \longrightarrow L_A(M)$ et $L(\psi) : A \otimes L(W) \longrightarrow L_A(N)$ vérifiant la condition (F^2) .

Soit $L_A(f) : L_A(M) \longrightarrow L_A(N)$ le morphisme induit par f . Il est obtenu en étendant par la propriété universelle le morphisme de DG-modules/ A $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow L_A(N)$. Soit $L_K(f) : L(V) \longrightarrow L(W)$ le morphisme de DG-algèbres de Lie induit par $L_A(f)$ et soit $f^K : V \longrightarrow W$ le morphisme de DG-espaces vectoriels induit par f . Alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f^K} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(V) & \xrightarrow{L_K(f)} & L(W) \end{array}$$

car si $v = 1 \otimes_A x \in V$, $L_K(f)(1 \otimes_A x) = 1 \otimes_A L_A(f)x = 1 \otimes_A f(x) = f^K(1 \otimes_A x)$. Il s'ensuit, par unicité, que $L_K(f)$ est égal au morphisme de DG-algèbres de Lie $L(f^K)$ obtenu en étendant par la propriété universelle le morphisme de DG-espaces vectoriels $V \xrightarrow{f^K} W \longrightarrow L(W)$.

Or, d'après (2.3), f^K est un quasi-isomorphisme et comme $L(H(V)) = H(L(V))$, [12] (page 280), $L_K(f)$ est aussi un quasi-isomorphisme. Comme $L_A(M)$ et $L_A(N)$ vérifient encore l'hypothèse (i), resp. (ii), si M et N la vérifient, en appliquant encore (2.3), on en déduit que $L_A(f)$ est un quasi-isomorphisme.

Changement de base : Soient A et A' deux DG-algèbres, M un DG-module/ A et $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres. Alors $A' \otimes_A M$ est un DG-module/ A' avec la différentielle $d_{A'} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_M$. On dit que $A' \otimes_A M$ est le DG-module déduit de M par le changement de base f .

Remarques : (1) Si A et A' sont augmentées et si M est un DG-module/ A F^2 -libre, alors $A' \otimes_A M$ est un DG-module/ A' F^2 -libre, comme on peut le vérifier directement.

(2) Si A et A' sont augmentées, M est un DG-module/ A F^2 -libre et si $f : A \longrightarrow A'$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres, alors le morphisme naturel $M \longrightarrow A' \otimes_A M$ est un quasi-isomorphisme sur f si $M^p = 0$ lorsque $p < 0$ ou si A et A' sont telles que $A^p = A'^q = 0$ pour $p > n$ et $q > m$ et $(K \otimes_A M)_r = 0$ si $r < 0$, d'après (2.4).

(3) Si A et A' sont augmentées, si M et N sont deux DG-modules/ A F^2 -libres et si $f : A \longrightarrow A'$ est un quasi-isomorphisme, alors, d'après (2.4), un quasi-isomorphisme de DG-modules/ A $\alpha : M \longrightarrow N$ induit un quasi-isomorphisme de DG-modules/ A' $A' \otimes_A M \longrightarrow A' \otimes_A N$ si $M^p = N^p = 0$ lorsque $p < 0$ ou si A et A' sont telles que $A^p = A'^q = 0$ pour $p > n$ et $q > m$ et $(K \otimes_A M)_r = (K \otimes_A N)_r = 0$ si $r < 0$.

Comodules F^2 -libres

Filtration naturelle et définition de F^2 -libre . Soient C une DG-coalgèbre et M un DG-comodule/ C . Désignons par $F^p C$ le sous-DG-comodule/ C de C formé des éléments de degré $\leq p$. Alors $F^p M = F^p C \square_C M$ définit une filtration croissante de M

par des sous-DG-comodules/ C . C'est une filtration naturelle par rapport aux morphismes de DG-comodules/ C : si $f : N \longrightarrow M$ est un morphisme de DG-comodule/ C , alors $f(F^p N) \subset F^p M$.

Supposons que C soit augmentée et soit $\eta : K \longrightarrow C$ une augmentation . Soit M un DG-comodule/ C libre comme C -module, c'est-à-dire tel qu'il existe un isomorphisme de C -comodules

$$\varphi : M \xrightarrow{\sim} C \otimes_C (K \square M) ,$$

où K est muni de la structure de C -comodule donnée par l'augmentation. Désignons par V l'espace vectoriel $K \square_C M$ muni de la différentielle d_V obtenue par restriction de celle de M . Alors l'application

$$\tau_\varphi : M \longrightarrow V ,$$

définie par $\tau_\varphi = (\varepsilon \otimes \text{id})\varphi d_M - (\varepsilon \otimes d_V)\varphi$, est un morphisme de degré -1 d'espaces vectoriels tel que

$$\varphi d_M = (d_C \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_V)\varphi + (\text{id} \otimes \tau_\varphi)\Delta .$$

On dira que τ_φ vérifie la condition (F^2) si $\tau_\varphi(F^1 M) = 0$. On dira que M est F^2 -libre sur C s'il existe un isomorphisme de C -comodules $\varphi : M \xrightarrow{\sim} C \otimes V$ qui vérifie la condition (F^2) .

Si C est telle que $C_1 = 0$, alors tout C -comodule libre est F^2 -libre .

Suite spectrale .

2.5 Lemme : Soient C une DG-coalgèbre augmentée et M un DG-comodule/ C F^2 libre sur C et tel que

$(K \square M)_p = 0$ si $p < 0$. Soit $\phi : M \xrightarrow{\sim} C \otimes V$ un isomorphisme de C -comodules vérifiant la condition (F^2) . Alors la suite spectrale associée à la filtration naturelle de M converge vers $H(M)$ et ϕ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E^2 \approx H(C) \otimes H(V)$.

Démonstration : ϕ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $F^p M \approx \bigoplus_{r \leq p} C_p \otimes V$ et donc un isomorphisme $E_p^0 \approx C_p \otimes V$, avec $d^0 = \text{id} \otimes d_V$. D'où $E_p^1 \approx C_p \otimes H(V)$.

Si $c \otimes v \in C_p \otimes V$ avec $d_V v = 0$, on a $\phi d_M \phi^{-1}(c \otimes v) - d_C c \otimes v = 1 \otimes \tau_\phi \phi^{-1}(c \otimes v) + \sum (-1)^{\deg c'} c'_1 \otimes \tau_\phi \phi^{-1}(c''_1 \otimes v)$ si $\Delta c = c \otimes 1 + 1 \otimes c + \sum_1 c'_1 \otimes c''_1$. Comme $\tau_\phi(F^1 M) = 0$, on a $\deg c'_1 < p - 1$ pour tout i tel que $\tau_\phi \phi^{-1}(c''_1 \otimes v) \neq 0$. Donc $d_M \phi^{-1}(c \otimes v) - \phi^{-1}(d_C c \otimes v) \in F^{p-2} M$, d'où $d^1 = d_C \otimes \text{id}$ et $E^2 \approx H(C) \otimes H(V)$.

Morphismes et comparaison de suites spectrales. Soient C et C' deux DG-coalgèbres augmentées, M un DG-comodule/ C et N un DG-comodule/ C' . Soient $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres et $\phi : N \longrightarrow M$ un morphisme sur f . Soient W et V respectivement les espaces vectoriels gradués $K \square_C N$ et $K \square_C M$ munis des différentielles induites par celles respectivement de N et M . Alors par restriction α induit un morphisme de DG-espaces vectoriels $\alpha^K : W \longrightarrow V$.

2.8 Corollaire : Avec les notations ci-dessus, supposons que N et M soient F^2 -libres sur C' et C respectivement et soient tels que $(K \square_{C'} N)_p = (K \square_C M)_p = 0$ si

$p < 0$. Alors α est un quasi-isomorphisme si et seulement si α^K en est un .

Démonstration : Le corollaire découle de (2.7) et du théorème de comparaison de Moore .

* 2.9 Corollaire : Soient C, C' deux DG-coalgèbres augmentées et $f : C' \longrightarrow C$ un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres . Soient M, M' deux DG-comodules/ C F^2 -libres, N, N' deux DG-comodules/ C' F^2 -libres, tels que $(K \square_C M)_p = (K \square_C M')_p = (K \square_{C'} N)_p = (K \square_{C'} N')_p = 0$ si $p < 0$. Soient $\alpha : N \longrightarrow M$ et $\alpha' : N' \longrightarrow M'$ deux quasi-isomorphismes sur f . Alors $\alpha \square_f \alpha' : N \square_{C'} N' \longrightarrow M \square_C M'$ est un quasi-isomorphisme sur f .

Démonstration : on applique le corollaire (2.8) .

2.10 Corollaire : Soient C une DG-algèbre augmentée et $A = C^*$ la DG-algèbre duale . Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $C_p = 0$ si $p > n$. Soient M et N deux DG-comodules/ C F^2 -libres, tels que $K \square_C M, K \square_C N$ soient de dimension finie en chaque degré et $(K \square_C M)_p = (K \square_C N)_p = 0$ si $p < 0$. Soit $\alpha : N \longrightarrow M$ un quasi-isomorphisme de DG-comodules/ C . Alors le morphisme naturel $\text{Hom}^C(C, N) \longrightarrow \text{Hom}^C(C, M)$, défini par $\phi \longmapsto \alpha \phi$, est un quasi-isomorphisme .

Démonstration : remarquons qu'un isomorphisme $M \approx C \otimes V$ vérifiant la condition (F^2) induit un isomorphisme $H^C(C, M) \approx \text{Hom}^C(C, C \otimes V) = \text{Hom}(C, V) = A \otimes V$ vérifiant la condition (F^2) (au sens des A -modules) . (Le morphisme canonique $\text{Hom}^C(C, C \otimes V) \longrightarrow \text{Hom}(C, V)$, défini par $\varphi \longrightarrow (\varepsilon \otimes \text{id})\varphi$, est un isomorphisme d'inverse $\psi \longrightarrow (\text{id} \otimes \psi)\Delta_C$. Lorsque V est de dimension finie en chaque degré, le morphisme canonique $A \otimes V \longrightarrow \text{Hom}(C, V)$, défini par $a \otimes v \longmapsto (c \longmapsto (-1)^{\text{deg } v} \text{deg }_a(c)v)$ est un isomorphisme) . On applique (2.8) et (2.3) pour conclure.

Changement de base : Soient C et C' deux DG-coalgèbres, $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres et M un DG-comodule/ C . Considérons C' muni de la structure de DG-comodule/ C donnée par f ($C' \longrightarrow C \otimes C'$, $c' \longmapsto (f \otimes \text{id})\Delta c'$) . On dit que $C' \square_C M$ est le DG-comodule/ C' déduit de M par le changement de base f .

Remarques : (1) Si C et C' sont augmentées et M est F^2 -libre sur C , alors $C' \square_C M$ est F^2 -libre sur C' .

(2) Si C et C' sont augmentées , $f : C' \longrightarrow C$ est un quasi-isomorphisme et M est F^2 -libre sur C , et tel que $(K \square_C M)_p = 0$ si $p < 0$, alors $C' \square_C M \longrightarrow M$ est un quasi-isomorphisme sur f . (Corollaire 2.9) .

(3) Si C et C' sont augmentées, M et N sont F^2 -libres sur C , $f : C' \longrightarrow C$ est un quasi-isomorphisme , alors un quasi-isomorphisme $\alpha : N \longrightarrow M$ de DG-comodules/ C

induit un quasi-isomorphisme $C' \square_C N \longrightarrow C' \square_C M$ de DG-comodule/ C' (Corollaire 2.9) .

3 . FIBRÉS

On supposera dorénavant que toutes les DG-algèbres et toutes les DG-coalgèbres soient augmentées et munies d'une augmentation choisie et que les morphismes de DG-algèbres, resp. de DG-coalgèbres soient tels qu'ils commutent avec ces augmentations .

Fibrés sur une DG-algèbre .

Définitions . Soit A une DG-algèbre . Un fibré sur A est un morphisme de DG-algèbres $\pi : A \longrightarrow E$ tel que E soit un A -module libre . La fibre F de π est l'algèbre $K \otimes_A F$ munie de la différentielle induite par celle de E . On dira que π vérifie la condition (F^2) pour la différentielle si E est un A -module F^2 -libre . On dira simplement que π vérifie la condition (F^2) s'il existe un isomorphisme $\varphi : A \otimes F \xrightarrow{\sim} E$ de A -modules vérifiant la condition (F^2) et tel que pour tous $x, x' \in F$, $\varphi(1 \otimes xx') - \varphi(1 \otimes x)\varphi(1 \otimes x') \in F^2 E$.

On définit de façon évidente les morphismes de fibrés sur A .

On dira qu'un morphisme de DG-algèbres $\sigma : E \longrightarrow A$ est une section de π si $\sigma\pi = \text{id}$.

Changement de base . Soient $\pi : A \longrightarrow E$ un fibré sur A et $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres . Alors le morphisme naturel de DG-algèbres $\pi_f = \text{id} \otimes_A \pi : A' \longrightarrow A' \otimes_A E$ est un fibré sur A' de même fibre que π , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 \otimes \text{id} & \\
 & \underset{A}{\longrightarrow} & \\
 A' \otimes_A E & \longleftarrow & E \\
 \uparrow \pi_f & & \uparrow \pi \\
 A' & \xleftarrow{f} & A
 \end{array}$$

On dira que π_f est le fibré sur A' obtenu de π par le changement de base f . Le changement de base préserve clairement la condition (F^2) .

Suite spectrale : à tout fibré $\pi : A \longrightarrow E$ vérifiant la condition (F^2) pour la différentielle est associée une suite spectrale telle que (lemme 2.1) :

$$E_2 \approx H(A) \otimes H(F) \Longrightarrow H(E),$$

où l'isomorphisme est naturel.

Remarque : si $\pi : A \longrightarrow E$ est un fibré vérifiant la condition (F^2) pour la différentielle et si $f : A \longrightarrow A'$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres, alors $1 \otimes \text{id}_A$, $E \longrightarrow A' \otimes_A E$ est un quasi-isomorphisme sur f .

Fibrés quasi-isomorphes

Soient $\pi : A \longrightarrow E$ et $\pi' : A' \longrightarrow E'$ deux fibrés. On dira qu'ils sont quasi-isomorphes s'ils le sont en tant que morphismes de DG-algèbres (voir section 1).

Remarquons que si π et π' vérifient la condition (F^2) pour la différentielle, alors ils sont quasi-isomorphes si et seulement si π' est quasi-isomorphe à π_f , où $f : A \longrightarrow A'$

(ou $f : A' \longrightarrow A$) est un quasi-isomorphisme . Car, si π et π' sont quasi-isomorphes par $g : E \longrightarrow E'$ et $f : A \longrightarrow A'$ tels que $g\pi = \pi'f$, alors $g' : A' \otimes_A E \longrightarrow E'$ défini par $g(a' \otimes e) = \pi'(a')g(e)$ est un morphisme de fibrés sur A' tel que $g = g' \circ (1 \otimes \text{id})$. En particulier, g' est un quasi-isomorphisme . La réciproque est aussi évidente .

3.1 Proposition : Soit A une DG-algèbre libre telle que $A^0 = K$, $A^1 = 0$. Soit $\pi : A \longrightarrow E$ un fibré sur A . Alors pour toute DG-algèbre A' équivalente à A (par la relation d'équivalence engendrée par les quasi-isomorphismes, voir Section 1) , il existe un fibré sur A' quasi-isomorphe à π .

Démonstration : en effet, A étant libre, d'après [14] (théorème 2.1, page 280), A est le produit tensoriel d'une DG-algèbre libre maximale $\mathcal{M}$ et d'une DG-algèbre acyclique . Comme $A^1 = 0$, $\mathcal{M}$ est le modèle libre minimal de A ([14], pages 288-289) et comme A' est équivalente à A , il existe un quasi-isomorphisme $f : A \longrightarrow A'$ de DG-algèbres . Alors $\pi_f : A' \longrightarrow A' \otimes_A E$ est quasi-isomorphe à π .

Modèles fibrés. Le modèle minimal de Sullivan .

On dira qu'un fibré $\pi : A \longrightarrow E$ est un modèle fibré d'un morphisme $\alpha : A' \longrightarrow B$ de DG-algèbres si π et α sont deux morphismes équivalents (voir Section 1) .

Soient A et B deux DG-algèbres telles que $H^0(A) = H^0(B) = K$ et $\alpha : A \longrightarrow B$ un morphisme de DG-algèbres tel que $H^1(\alpha) : H^1(A) \longrightarrow H^1(B)$ soit injectif. Alors, d'après [14] (Théorème 5.1, page 290), il existe un fibré $\pi_\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow A$ quasi-isomorphe à α

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & B \\ \pi_\alpha \swarrow & & \nearrow \alpha \\ & A & \end{array}$$

tel que $\mathcal{M}$ soit une DG-algèbre/ A libre minimale sur A , i.e. égale comme algèbre à $A \otimes S(V)$, où $S(V)$ est l'algèbre libre sur un espace vectoriel gradué V , munie d'une différentielle d telle que $d(a \otimes 1) = da \otimes 1$, $a \in A$, et si $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base de V , alors il existe un ordre total sur I tel que $d(1 \otimes v_i)$ soit une somme d'éléments de la forme $a \otimes v_{i_1} \dots v_{i_n}$, où $a \in A$ et $i_k < i$. On dira que π_α est le modèle minimal de Sullivan de α .

On a l'unicité de ce modèle dans le sens suivant : si $\pi'_\alpha : A \longrightarrow \mathcal{M}'$ est un fibré sur A muni d'un quasi-isomorphisme sur A

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}' & \xrightarrow{\quad} & B \\ \pi'_\alpha \swarrow & & \nearrow \alpha \\ & A & \end{array}$$

et si $\mathcal{M}'$ est libre minimale sur A et munie d'une différentielle vérifiant les mêmes conditions que celle de $\mathcal{M}$, alors il existe un isomorphisme de fibrés sur A $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ faisant commuter le diagramme suivant à homotopie près

(voir [14], définition 3.1, page 284) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

En particulier $\pi_\alpha : A \longrightarrow \mathcal{M}$ est quasi-isomorphe à tout morphisme $\alpha' : A \longrightarrow B'$ équivalent à α .

Soient A et A' deux DG-algèbres équivalentes avec $H^0(A) = H^0(A') = K$. Soit $\mathcal{M}_A$ le modèle minimal de Sullivan de A (i.e. $K \longrightarrow \mathcal{M}_A$ est le modèle minimal de Sullivan de $K \longrightarrow A$, au sens défini ci-dessus). Il existe des quasi-isomorphismes de DG-algèbres $\rho : \mathcal{M}_A \longrightarrow A$ et $\rho' : \mathcal{M}_A \longrightarrow A'$ et si $\pi : \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha$ est le modèle minimal de Sullivan de $\mathcal{M}_A \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\alpha} B$ (où l'on suppose que $H^1(\alpha) : H^1(A) \longrightarrow H^1(B)$ est injective), alors par changement de base on a un modèle fibré sur A' de α :

$$\begin{array}{ccccc} A' \otimes_{\mathcal{M}_A} \mathcal{M}_\alpha & \longleftarrow & \mathcal{M}_\alpha & \longrightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A' & \xleftarrow{\rho'} & \mathcal{M}_A & \xrightarrow{\rho} & A \end{array}$$

On dira que le fibré $A' \longrightarrow A' \otimes_{\mathcal{M}_A} \mathcal{M}_\alpha$ est le modèle minimal de Sullivan de α sur A' .

Remarquons que si $\pi' : A' \longrightarrow E$ est un modèle fibré sur A' pour α , alors il existe un quasi-isomorphisme

$$A' \otimes_{\mathcal{M}_A} \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow E \text{ de fibrés sur } A' .$$

Rapport avec la géométrie .

Nous désignerons par $A^*(X)$ la DG-algèbre des formes différentielles polynomiales sur le complexe singulier d'un espace topologique X ([14], page 297), et par $\mathcal{M}_X$ le modèle minimal de Sullivan de $A^*(X)$. A la donnée d'un point $x \in X$ correspond une augmentation $A^*(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Soit $p : X \longrightarrow Y$ un fibré au sens de Serre d'espaces connexes pointés et soit Z la fibre de p . Supposons que Z soit 1-connexe et que $\pi_1(Y)$ agisse trivialement sur $\pi_n(Z)$, $n \geq 2$. Soit A une DG-algèbre équivalente à $A^*(Y)$. Alors, d'après [7] (théorème 6.4), le modèle minimal de Sullivan $\pi_p : A \longrightarrow \mathcal{M}_p$ sur A du morphisme $\gamma : A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$ induit par p , est tel que sa fibre soit le modèle minimal de Sullivan $\mathcal{M}_Z$ de $A^*(Z)$.

Le théorème suivant est aussi démontré dans [7] (théorème 6.6) :

3.2 Théorème : Gardons les notations ci-dessus en rempla-

çant A par le modèle minimal de Sullivan $\mathcal{M}_Y$ de $A^*(Y)$ et supposons de plus que Y soit 1-connexe .

Soient $f : Y' \longrightarrow Y$ une application continue et

$\mathcal{M}_Y \longrightarrow \mathcal{M}_{Y'}$, le morphisme de modèles minimaux de Sullivan qu'elle induit . Alors

$\mathcal{M}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{M}_{Y'} \otimes_{\mathcal{M}_Y} \mathcal{M}_p$ est le modèle minimal

de Sullivan sur $\mathcal{M}_Y$, du morphisme

$A^*(Y) \longrightarrow A^*(Y' \times_X Y)$ induit par le fibré $Y' \times_X Y \longrightarrow Y$.

(Dans [7], Y' est supposé 1-connexe, mais cette hypothèse n'est pas utilisée dans le théorème 6.6 . Par contre on ne peut omettre de supposer que Y soit 1-connexe) .

3.3 Corollaire : Gardons toujours les mêmes hypothèses

et notations que dans le théorème et soit $\pi : A \longrightarrow E$

un modèle fibré sur une DG-algèbre A de

$\gamma : A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$. Soit $A \longrightarrow A'$ un morphisme

de DG-algèbres équivalent à $A^*(Y) \longrightarrow A^*(Y')$.

Alors $\pi' : A' \longrightarrow A' \otimes_A E$ est un modèle fibré sur A' pour $A^*(Y') \longrightarrow A^*(Y' \otimes_A X)$.

Démonstration : il existe un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p & \longrightarrow & E \\ \pi_p \uparrow & & \uparrow \pi \\ \mathcal{M}_Y & \xrightarrow{\rho} & A \end{array}$$

et, d'après (2.4), le produit sur ρ

$$\mathcal{M}_{Y'} \otimes_{\mathcal{M}_Y} \mathcal{M}_p \longrightarrow A' \otimes_A E$$

est un quasi-isomorphisme sur $\rho' : \mathcal{M}_{Y'} \longrightarrow A'$.

On a en particulier le corollaire suivant :

3.4 Corollaire : Tout fibré induit par un fibré dont la base est 1-connexe possède un modèle fibré vérifiant la condition (F^2) .

Existence d'une section .

3.5 : Proposition : Soient A et B deux DG-algèbres telles que $H^0(A) = H^0(B) = K$ et $\alpha : A \longrightarrow B$ un morphisme de DG-algèbres tel que $H^1(\alpha) : H^1(A) \longrightarrow H^1(B)$ soit injectif . Soient A' une DG-algèbre et $f : A' \longrightarrow A$ un quasi-isomorphisme de DG-algèbres . Soit $\pi : A' \longrightarrow \mathcal{M}$ le modèle minimal de Sullivan de α sur A' .

Supposons qu'il existe un morphisme de DG-algèbres $\beta : B \longrightarrow A$ tel que $\beta\alpha = \text{id}$. Alors il existe un morphisme de DG-algèbres $\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow A'$ tel que $\sigma\pi = \text{id}$ et faisant commuter un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\rho'} & B \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

où ρ' est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres sur f .

Démonstration : Rappelons que $\mathcal{M} = A' \otimes S(V)$ et le quasi-isomorphisme $\rho : \mathcal{M} \longrightarrow B$ sur $f : A' \longrightarrow A$ sont construits pas à pas par extensions successives ([14], pages 289-291 ; voir aussi [8], page 508) telles qu'en particulier pour tout $p > 0$ on ait une base $\{x_1, y_j\}$ de V^p avec $d(1 \otimes x_j) \neq 0$, $\rho(1 \otimes x_j) = 0$, $d(1 \otimes y_j) = 0$, $\rho(1 \otimes y_j) = b_j \neq 0$.

Soit $a_j = \beta(b_j)$. Comme b_j est un cocycle, a_j en est un aussi et sa classe $\bar{a}_j$ est l'image par $H(f)$ d'une classe $\bar{\omega}_j$. Soit $\tilde{a}_j \in A$ tel que $f\omega_j - a_j = d\tilde{a}_j$. On définit un morphisme $\rho' : \mathcal{M} \longrightarrow B$ en posant $\rho'\pi = \alpha f$, $\rho'(1 \otimes x_1) = 0$ et $\rho'(1 \otimes y_j) = b_j + d\alpha(\tilde{a}_j)$. C'est un quasi-isomorphisme sur f .

On définit pas à pas σ en posant $\sigma\pi = \text{id}$, $\sigma(1 \otimes x_1) = 0$ et $\sigma(1 \otimes y_j) = \omega_j$. On a $\beta\rho'(1 \otimes y_j) = \beta(b_j + d\alpha(\tilde{a}_j)) = a_j + d\tilde{a}_j = f\omega_j = f\sigma(1 \otimes y_j)$.

3.6 : Corollaire : Soit $p : X \longrightarrow Y$ un fibré de Serre d'espaces connexes pointés muni d'une section $s : Y \longrightarrow X$. Supposons que $H^1(p)$ soit injectif. Alors si A est une DG-algèbre équivalente à $A^*(Y)$, le modèle minimal de Sullivan de $A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$ sur A est muni d'une section équivalente au morphisme $A^*(X) \longrightarrow A^*(Y)$ induit par s .

Démonstration : il existe un quasi-isomorphisme de DG-algèbres $\mathcal{M}_Y \longrightarrow A$ et le morphisme $\sigma' : A \otimes_{\mathcal{M}_Y} \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow A$ défini par $\text{id} \otimes \sigma$, où σ est le morphisme construit dans

(3.5) est tel que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes M_\alpha & \\
 \sigma' \swarrow & M_Y & \nwarrow \\
 A & \equiv & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A' \otimes M_\alpha & \longleftarrow & M_\alpha \\
 \sigma' \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 A' & \longleftarrow & M_Y
 \end{array}$$

D'où le corollaire .

Invariance de $\text{Tor}^A(K, B)$ dans la classe d'un morphisme

$A \longrightarrow B$ de DG-algèbres .

3.7 : Proposition : Soient A et A' deux DG-algèbres telles que $A^0 = A'^0 = K$ et $A^1 = A'^1 = 0$. Soient $f : A \longrightarrow B$ et $f' : A' \longrightarrow B'$ deux morphismes équivalents de DG-algèbres . Alors il existe un morphisme d'espaces vectoriels gradués $\text{Tor}^A(K, B) \approx \text{Tor}^{A'}(K, B')$.

Démonstration : Pour calculer $\text{Tor}^A(K, B)$, on peut résoudre B par la bar-construction $B(A, B)$ ([13], page 63) et l'on a $\text{Tor}^A(K, B) = H(K \otimes_A B(A, B))$. D'après Eilenberg-Moore (idem, page 61) il existe une suite spectrale telle que $E^2 = \text{Tor}^{H(A)}(K, H(B)) \Rightarrow \text{Tor}^A(K, B)$.

Sans perte de généralité on peut supposer que f et f' sont quasi-isomorphes. Si le quasi-isomorphisme est donné par un couple

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\beta} & B' \\
 f \uparrow & & \uparrow f' \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & A'
 \end{array}$$

alors, par naturalité de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (idem, page 62), (α, β) induit un morphisme de suites spectrales $\text{Tor}^\alpha(\text{id}, \beta) : E^r \longrightarrow E'^r$ tel que $\text{Tor}^\alpha(\text{id}, \beta) : E^2 \xrightarrow{\sim} E'^2$ soit un isomorphisme. On applique alors le "mapping theorem" pour conclure.

3.8 : Corollaire : Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de DG-algèbres. Supposons que $\pi : A' \longrightarrow E$ soit un modèle fibré pour f et que $A^0 = A'^0 = K$, $A' = A'^1 = 0$. Soit F la fibre de π . Alors $\text{Tor}^A(K, B) \cong H(F)$.

Démonstration : en effet, $\text{Tor}^{A'}(K, E) = H(F)$ puisque E est un A -module libre.

Fibrés sur une DG-coalgèbre.

Définitions. Soit C une DG-coalgèbre (augmentée). Un fibré sur C est un morphisme de DG-coalgèbres $\pi : E \longrightarrow C$ tel que E soit un comodule libre sur C . La fibre F de π est la coalgèbre $K \square_C E$ munie de la différentielle obtenue par restriction de la différentielle sur E . On dira que π vérifie la condition (F^2) pour la différentielle si E est un C -comodule F^2 -libre. On dira simplement que π vérifie la condition (F^2) s'il existe un isomorphisme $\phi : E \xrightarrow{\sim} C \otimes F$ de C -comodule vérifiant la condition (F^2) et tel que pour tout $x \in F$ on ait $\Delta_E \phi^{-1}(1 \otimes x) = \phi^{-1}(\sum_1 1 \otimes x'_1 \otimes 1 \otimes x''_1) \in F^2 E$, où

$$\Delta_F x = \sum_1 x'_1 \otimes x''_1 .$$

On définit de façon évidente les morphismes de fibrés sur C .

On dira qu'un morphisme de DG-coalgèbres $\sigma : C \longrightarrow E$ est une section de π si $\sigma\pi = \text{id}$.

•

Remarques : (1) Si $\pi : E \longrightarrow C$ est un fibré sur C dont la fibre est de dimension finie en chaque degré, si $E^* = \text{Hom}(E, K)$ et $A = \text{Hom}(C, K)$, alors $\pi^* : A \longrightarrow E^*$ est un fibré sur la DG-algèbre A . Cette dualité préserve la condition (F^2) .

(2) Si A est une DG-algèbre de dimension finie en chaque degré et $\pi : A \longrightarrow E$ est un fibré sur A dont la fibre est de dimension finie en chaque degré, alors $\pi^* : E^* \longrightarrow C$, où $E^* = \text{Hom}(E, K)$ et $C = \text{Hom}(A, K)$, est un fibré sur la DG-coalgèbre C . Cette dualité préserve la condition (F^2) .

Changement de base : Soient $\pi : E \longrightarrow C$ un fibré sur C et $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres. Alors le morphisme naturel de DG-coalgèbres $\pi_f : C' \square_C E \longrightarrow E'$ est un fibré sur C' de même fibre que π , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C' \square_C E & \xrightarrow[\quad C \quad]{\varepsilon \square \text{id}} & E \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi \\ C' & \xrightarrow{\quad f \quad} & C \end{array}$$

On dira que π_f est le fibré sur C' obtenu de π par le changement de base f . Le changement de base préserve la condition (F^2) .

Suite spectrale : A tout fibré $\pi : E \longrightarrow C$ vérifiant la condition (F^2) pour la différentielle est associée une suite spectrale telle que (lemme 2.7) :

$$E^2 \simeq H(C) \otimes H(F) \implies H(E) \quad .$$

Remarque : Si $\pi : E \longrightarrow C$ est un fibré vérifiant la condition (F^2) pour la différentielle et $f : C' \longrightarrow C$ un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres, alors $\varepsilon \square_C \text{id}$ est un quasi-isomorphisme sur f .

4 . FIBRES DONT LA FIBRE EST DE DIMENSION FINIE EN CHAQUE DEGRE ET COALGEBRES DIFFERENTIELLES SUR UNE DG-ALGEBRE .

Le dual d'une DG-coalgèbre C est une DG-algèbre C^* et le dual d'une DG-algèbre de dimension finie en chaque degré est une DG-coalgèbre .

De façon analogue, étant donné une DG-coalgèbre C , nous allons voir que sous certaines conditions le foncteur

$$(\pi : E \longrightarrow C) \longmapsto \text{Hom}^C(C, E)$$

met en dualité les fibrés sur C et les DG-coalgèbres sur C^* (proposition 4.1) .

Dans le cas des fibrés sur une DG-algèbre A , la dualité est effectivement donnée par la dualité sur A (proposition 4.2) :

$$(\pi : A \longrightarrow E) \longmapsto \text{Hom}_A(E, A) .$$

Lorsque C (resp. A) est telle que $C_p = 0$ pour $p > n$ (resp. $A^p = 0$, $p > n$) , alors cette dualité conserve les quasi-isomorphismes (proposition 4.3) .

Les foncteurs $\mathcal{F}_C$ et $\mathcal{D}_C$.

4.1 Proposition : Soient C une DG-coalgèbre (augmentée) et $A = C^*$ la DG-algèbre duale . Alors la correspondance $\mathcal{X} \rightarrow C \otimes_A \mathcal{X}$ définit un foncteur $\mathcal{F}_C$ de

la catégorie des DG-coalgèbres/A libres comme A-modules, dans la catégorie des fibrés sur C. Sa restriction aux $\mathcal{X}$ telles que $K \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré est à valeurs dans les fibrés dont la fibre est de dimension finie en chaque degré et est inversible. Le foncteur inverse $\mathcal{D}_C$ est défini par la correspondance $\pi \longrightarrow \text{Hom}^C(C, E)$, où $\pi : E \longrightarrow C$ est un fibré dont la fibre est de dimension finie en chaque degré. $\mathcal{F}_C$ et $\mathcal{D}_C$ sont fonctoriels par rapport aux changements de base et ils préservent la propriété (F^2) . De plus, il y a une correspondance biunivoque entre les augmentations de $\mathcal{D}_C(\pi)$ et les sections de π .

Démonstration : Soient $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/A libre comme module sur A et $\mathcal{F}_C(\mathcal{X}) = C \otimes_A \mathcal{X}$. C'est une DG-coalgèbre avec le coproduit défini par

$$C \otimes_A \mathcal{X} \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_{\mathcal{X}}} (C \otimes_A C) \otimes (\mathcal{X} \otimes_A \mathcal{X}) \longrightarrow (C \otimes_A \mathcal{X}) \otimes (C \otimes_A \mathcal{X})$$

Soit $\pi : \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \longrightarrow C$ le morphisme défini par $\pi = \text{id} \otimes \varepsilon$, où $\varepsilon : \mathcal{X} \longrightarrow A$ est la co-unité de $\mathcal{X}$. On vérifie directement que π est un morphisme de DG-coalgèbres.

Muni de la structure induite par π , $\mathcal{F}_C(\mathcal{X})$ est un comodule libre sur C et si $\mathcal{X}$ est un A-module F^2 -libre, $\mathcal{F}_C(\mathcal{X})$ est un C-comodule F^2 -libre. En effet, un isomorphisme $\mathcal{X} \approx A \otimes F$ de modules sur A (vérifiant la condition

(F^2) induit un isomorphisme $\mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \approx C \otimes F$ de comodules sur C (vérifiant la condition (F^2)) .

Il est clair que si $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un morphisme de DG-coalgèbres/ A , alors $\text{id} \otimes \alpha : \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathcal{X}')$ est un morphisme de fibrés sur C .

Fonctorialité de $\mathcal{F}_C$ par rapport aux changements de base :

Soit $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres .

Considérons C' comme un DG-module/ A avec $a \cdot c' =$

$$\begin{aligned} &= (af \otimes \text{id}) \Delta c', \quad a \in A, \quad c' \in C'. \quad \text{Alors } C' \square_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) = \\ &= C' \square_C (C \otimes_A \mathcal{X}) = C' \otimes_A \mathcal{X} = C' \otimes_{A'} (A' \otimes_A \mathcal{X}) = \mathcal{F}_{C'}(A' \otimes_A \mathcal{X}), \end{aligned}$$

où $A' = C'^*$ est munie de la structure de DG-module/ A induite par $f^* : A \longrightarrow A'$.

Le foncteur $\mathcal{D}_C$. Rappelons que si M est un DG-comodule/ C , on désigne par $\text{Hom}^C(C, M)$ le sous-DG-module/ A de $\text{Hom}(C, M)$ formé des φ tels que $\Delta\varphi = (\text{id} \otimes \varphi)\Delta$.

Soit $\pi : E \longrightarrow C$ un fibré sur C dont la fibre F est de type fini et $\mathcal{D}_C(\pi) = \text{Hom}^C(C, E)$.

C est un DG-module/ A libre comme A -module (et F^2 -libre comme A -module si π est un fibré- F^2) car un isomorphisme de C -modules $E \approx C \otimes F$ induit un isomorphisme de A -modules $\text{Hom}^C(C, E) \approx \text{Hom}^C(C, C \otimes F)$ et $\text{Hom}^C(C, C \otimes F) = \text{Hom}(C, F)$ par

l'isomorphisme canonique $\gamma \longrightarrow (\varepsilon \otimes \text{id})\gamma$ (l'inverse étant $\lambda \longrightarrow (\text{id} \otimes \lambda)\Delta$) ; or F étant de dimension finie en chaque degré, $A \otimes F \cong \text{Hom}(C, F)$ par l'isomorphisme canonique $a \otimes x \longrightarrow (c \longrightarrow (-1)^{\deg c \deg x} a(c)x)$. Donc, en composant on obtient un isomorphisme de modules sur A $\text{Hom}^C(C, E) = A \otimes F$ et il est clair qu'il vérifie la condition (F^2) si $E \approx C \otimes F$ vérifie la condition (F^2) .

Pour définir la structure sur $\mathcal{D}_C(\pi)$ de DG-coalgèbre/ A , considérons le morphisme de DG-modules/ A

$$\Phi : \text{Hom}_A^C(C, E) \otimes_A \text{Hom}_A^C(C, E) \longrightarrow \text{Hom}_C^C(C, E \boxtimes_C E)$$

défini par $\Phi(\varphi \otimes \psi) = (\varphi \otimes \psi)\Delta_C$. C'est un isomorphisme car le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A^C(C, E) \otimes_A \text{Hom}_A^C(C, E) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}_C^C(C, E \boxtimes_C E) \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\ \text{Hom}_A^C(C, C \otimes F) \otimes_A \text{Hom}_A^C(C, C \otimes F) & \longrightarrow & \text{Hom}_C^C(C, (C \otimes F) \otimes_C (C \otimes F)) \\ & & \parallel \\ & & \text{Hom}_C^C(C, C \otimes F \otimes F) \\ \uparrow = & & \uparrow = \\ \text{Hom}(C, F) \otimes_A \text{Hom}(C, F) & \longrightarrow & \text{Hom}(C, F \otimes F) \\ \uparrow = & & \uparrow = \\ (A \otimes F) \otimes_A (A \otimes F) & \xlongequal{\quad} & A \otimes F \otimes F \end{array}$$

On en déduit que le morphisme de DG-modules/ A

$$\Delta : \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}_C(\pi) \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi),$$

obtenu en posant $\Delta\varphi = \Phi^{-1}\Delta_E\varphi$, définit sur $\mathcal{D}_C(\pi)$ une

structure de DG-coalgèbres/A dont la co-unité $\varepsilon : \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow A$ est définie par $\varphi \longmapsto (C \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow K)$.

Si $\pi : E \longrightarrow C$ et $\pi' : E' \longrightarrow C$ sont deux fibrés sur C dont les fibres sont de dimension finie en chaque degré et si $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de fibrés sur C , alors

$\mathcal{F}_C(f) : \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}_C(\pi')$, défini par $\mathcal{D}_C(f)\lambda = f\lambda$,

est un morphisme de DG-coalgèbres/A car le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_C(\pi) \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) & \xrightarrow{\mathcal{D}_C(f) \otimes_A \mathcal{D}_C(f)} & \mathcal{D}_C(\pi') \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi') \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \text{Hom}_C^C(C, E \square_C E) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \text{Hom}_C^C(C, E' \square_C E') \\ \varphi \longmapsto & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (f \otimes f)\varphi \end{array}$$

$\mathcal{F}_C \mathcal{D}_C(\pi) \cong \pi$ (canoniquement) si π est un fibré sur C dont la fibre est de dimension finie en chaque degré.

On définit

$$v : \mathcal{F}_C \mathcal{D}_C(\pi) = C \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow E$$

en posant $v(c \otimes \lambda) = (-1)^{\deg c \deg \lambda} \lambda(c)$. C'est un morphisme de DG-comodules/C et un calcul direct montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & (C \otimes_A C) \otimes (\mathcal{D}_C(\pi) \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi)) = (C \otimes_A \mathcal{A}(\pi)) \otimes (C \otimes_A \mathcal{A}(\pi)) \\ v \downarrow & & \downarrow v \otimes v \\ E & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & E \otimes E \end{array}$$

C'est donc un morphisme de DG-coalgèbres et pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de constater que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) & \approx & C \otimes_A (A \otimes F) \\ \downarrow & & \parallel \\ E & \approx & C \otimes F \end{array}$$

$\mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \cong \mathcal{X}$ (canoniquement) si $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/A telle que $K \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré . On définit

$$w : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) = \text{Hom}_A^C(C, C \otimes_A \mathcal{X})$$

en posant $w(\xi)(c) = (-1)^{\deg \xi \deg c} c \otimes \xi$. C'est un morphisme de DG-modules/A et l'on a que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{w} & \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathcal{X} \otimes_A \mathcal{X} & \xrightarrow{w \otimes w} & \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \otimes_A \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}), \end{array}$$

car on a $\Phi \Delta w(\xi)(c) = (-1)^{\deg \xi \deg c} \Delta c \otimes \Delta \xi = (\Phi(w \otimes w) \Delta \xi)(c)$

C'est donc un morphisme de DG-coalgèbres/A et pour voir que c'est un isomorphisme il suffit de constater que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & \approx & A \otimes F \\
 \downarrow w & & \parallel \\
 \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) \approx & & \text{Hom}(C, F) .
 \end{array}$$

Fonctorialité de $\mathcal{D}_C$ par rapport aux changements de base .

Soient $f : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DG-coalgèbres et

$f^* : A \longrightarrow A'$ le morphisme dual de DG-algèbres. On a

$$\mathcal{D}_{C'}(\pi_f) \approx A' \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) \quad (\text{canoniquement}) .$$

En effet, le morphisme $A' \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}_{C'}(\pi_f) = \text{Hom}^{C'}(C', C' \square_C F)$

défini par $a' \otimes \varphi \longrightarrow (a' \otimes \varphi f) \Delta_{C'}$, , est un morphisme de DG-algèbres/ A' et c'est un isomorphisme car le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A' \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{C'}(\pi_f) \\
 \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\
 A' \otimes_A \text{Hom}^C(C, C \otimes F) & \longrightarrow & \text{Hom}^{C'}(C', C' \square_C (C \otimes F)) \\
 = \uparrow & & \downarrow = \\
 & & \text{Hom}^{C'}(C', C' \otimes F) \\
 & & \parallel \\
 A' \otimes_A \text{Hom}(C, F) & \longrightarrow & \text{Hom}(C', F) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 = & & = \\
 A' \otimes_A (A \otimes F) & \xlongequal{\quad} & A' \otimes F
 \end{array}$$

Sections d'un fibré $\pi : E \longrightarrow C$ dont la fibre est de dimension finie en chaque degré et augmentations de $\mathcal{D}_C(\pi)$.
 Soit $\eta : A \longrightarrow \mathcal{D}_C(\pi)$ une augmentation et soit $\sigma = \eta(1)$.
 Comme η est un morphisme de DG-coalgèbres/A, on a $\sigma \underset{A}{\otimes} \sigma = \Delta \sigma$.
 Autrement dit, $\Delta_E \sigma = \Phi \Delta \sigma = \Phi(\sigma \underset{A}{\otimes} \sigma) = (\sigma \otimes \sigma) \Delta_C$.
 Donc $\sigma : C \longrightarrow E$ est un morphisme de DG-coalgèbres (car
 $0 = d\eta(1) = d\sigma = d_E \sigma - \sigma d_C$). Pour voir que $\pi \sigma = \text{id}$, re-
 marquons que par définition $\sigma \in \mathcal{D}_C(\pi)$ si et seulement si
 $(\pi \otimes \text{id}) \Delta_E \sigma = (\text{id} \otimes \sigma) \Delta_C$. Or, $(\pi \otimes \text{id}) \Delta_E \sigma = (\pi \sigma \otimes \sigma) \Delta_C$.
 Comme $\varepsilon \sigma = \varepsilon \eta(1) = \varepsilon : C \longrightarrow K$, la co-unité de C, on a
 $(\pi \sigma \otimes \varepsilon \sigma) \Delta_C = (\pi \sigma \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \varepsilon) \Delta_C = \pi \sigma$ et $(\pi \sigma \otimes \varepsilon \sigma) \Delta_C =$
 $= (\text{id} \otimes \varepsilon \sigma) \Delta_C = \text{id}$.

Réciproquement, étant donné un morphisme de DG-coalgèbres, $\sigma : C \longrightarrow E$ tel que $\pi \sigma = \text{id}$, on définit une augmentation $\eta : A \longrightarrow \mathcal{D}_C(\pi)$ en posant $\eta(a) = a\sigma$. Comme
 $\Delta_E \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \Delta_C$ et $\pi \sigma = \text{id}$, on a $(\pi \otimes \text{id}) \Delta_E \sigma = (\text{id} \otimes \sigma) \Delta_C$
 et donc η est bien définie. C'est un morphisme de DG-coalgèbres/A car $\Phi^{-1} \Delta_E \sigma = \sigma \otimes \sigma$ et $d_E \sigma = \sigma d_C$.

Remarque : Soient C une DG-coalgèbre, $A = C^*$ la DG-algèbre duale et $\pi : E \longrightarrow C$ un fibré sur C dont la fibre est de dimension finie en chaque degré.

Pour toute DG-coalgèbre B, il existe une correspondance biunivoque entre les morphismes de fibrés sur C.

$$\Phi : C \otimes B \longrightarrow E$$

et les morphismes

$$\psi : B \longrightarrow \mathcal{D}_C(\pi)$$

de DG-coalgèbres sur $u : K \longrightarrow A$.

En effet, Φ étant donné, on définit ψ en posant $\psi(b)(c) = (-1)^{\deg b \deg c} \Phi(c \otimes b)$ et, réciproquement, si ψ est donné, on pose $\Phi(c \otimes b) = (-1)^{\deg b \deg c} \psi(b)(c)$.

En particulier, il existe une correspondance biunivoque entre les morphismes de fibrés sur C

$$\Phi : C \otimes B \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathcal{X}) ,$$

où $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/ A libre comme A -module et telle que $K \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré, et les morphismes

$$\psi : B \longrightarrow \mathcal{X}$$

de DG-coalgèbres sur $u : K \longrightarrow A$. Dans ce cas on a

$$\Phi(c \otimes b) = c \otimes_A \psi(b)$$

car $\psi' : B \longrightarrow \mathcal{D}_C(\mathcal{F}_C(\mathcal{X}))$ est telle que $\psi'(b)(c) = (-1)^{\deg b \deg c} \Phi(c \otimes b)$ et l'identification $w : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{D}_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X})$ est donnée par $w(\xi)(c) = (-1)^{\deg \xi \deg c} c \otimes_A \xi$.

Les foncteurs $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{D}_A$.

4.2 Proposition : Soit A une DG-algèbre (augmentée).

Alors la correspondance $\mathcal{X} \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A)$ définit un foncteur inversible $\mathcal{F}_A$ de la catégorie des DG-coalgèbres/ A libres comme A -modules et telles que $K \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré, dans la catégorie des fibrés sur A

dont la fibre est de dimension finie en chaque degré. Le foncteur inverse $\mathcal{D}_A$ est défini par la correspondance $\pi \longrightarrow \text{Hom}_A(E, A)$, où $\pi : A \longrightarrow E$ est un fibré dont la fibre est de dimension finie en chaque degré. $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{D}_A$ sont fonctoriels par rapport aux changements de base et ils préservent la propriété (F^2) . Si A est la DG-algèbre duale d'une DG-coalgèbre C et si π^* est le fibré sur A dual d'un fibré π sur C dont la fibre est de dimension finie, alors $\mathcal{D}_C(\pi) \cong \mathcal{D}_A(\pi^*)$ (canoniquement et fonctoriellement par rapport aux changements de base). De plus il y a une correspondance biunivoque entre les augmentations de $\mathcal{D}_A(\pi)$ et les sections de π .

Démonstration : Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition (4.1) et c'est pourquoi nous ne la détaillons pas.

Le foncteur $\mathcal{F}_A$. Soient $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A libre comme A -module et telle que $K \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré et $\mathcal{F}_A(\mathcal{X}) = \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A)$. C'est une DG-algèbre avec

$$\text{Hom}_A(\mathcal{X}, A) \otimes \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A) = \text{Hom}_A(\mathcal{X} \otimes_A \mathcal{X}, A) \xrightarrow{\text{Hom}_A(\Delta, \text{id})} \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A),$$

(l'égalité découle de l'isomorphisme canonique, $\text{Hom}(F, A) \otimes \text{Hom}(F, A) \cong \text{Hom}(F \otimes F, A)$, si F est de dimension finie en chaque degré). C'est A -module libre et si $\mathcal{X}$ est un A -module F^2 -libre, $\mathcal{F}_A(\mathcal{X})$ l'est aussi.

Le morphisme $\pi : A \longrightarrow \mathcal{F}_A(\mathcal{X})$, défini par $\pi(a)(\xi) = a\varepsilon(\xi)$ est un morphisme de DG-algèbres et la structure de A-module sur $\mathcal{F}_A(\mathcal{X})$ est telle que $a \cdot \varphi = \pi(a)\varphi$, $a \in A$, $\varphi \in \mathcal{F}_A(\mathcal{X})$. Donc π est un fibré sur A et si $\mathcal{X}$ est F^2 -libre comme A-module, π est un fibré-vérifiant la condition F^2 .

Fonctorialité de $\mathcal{F}_A$ par rapport aux changements de base. Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres. On vérifie que $\mathcal{F}_{A'}(A' \otimes_A \mathcal{X}) = A' \otimes_A \mathcal{F}_A(\mathcal{X})$.

Le foncteur $\mathcal{D}_A$. Soient $\pi : A \longrightarrow E$ un fibré sur A dont la fibre F est de dimension finie en chaque degré et $\mathcal{D}_A(\pi) = \text{Hom}_A(E, A)$. C'est un DG-module/A sur lequel on définit une structure de DG-coalgèbre/A en remarquant que le morphisme $\Phi : \text{Hom}_A(E, A) \otimes_A \text{Hom}_A(E, A) \longrightarrow \text{Hom}_A(E \otimes_A E, A)$, défini par $\Phi(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = (-1)^{\deg \psi \deg x} \varphi(x)\psi(y)$, est un isomorphisme, et en posant $\Delta\varphi = \Phi^{-1}(\varphi \ m_E)$, où

$m_E : E \otimes E \longrightarrow E$ est le produit.

Fonctorialité de $\mathcal{D}_A$ par rapport aux changement de base : Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres. Alors

$$\mathcal{D}_{A'}(\pi_f) = A' \otimes_A \mathcal{D}_A(\pi) \quad (\text{canoniquement}).$$

$\mathcal{F}_A \mathcal{D}_A(\pi) \cong \pi$ (canoniquement) : l'isomorphisme est donné par $v : E \longrightarrow \mathcal{F}_A \mathcal{D}_A(\pi) = \text{Hom}_A(\mathcal{D}_A(\pi), A)$, $v(x)(\varphi) = (-1)^{\deg x \deg \varphi} \varphi(x)$.

$\mathcal{D}_A \mathcal{F}_A(\mathcal{X}) \cong \mathcal{X}$ (canoniquement) : l'isomorphisme
 est donné par $w : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{D}_A \mathcal{F}_A(\mathcal{X})$,
 $w(\xi)(\varphi) = (-1)^{\deg \xi \deg \varphi} \varphi(\xi)$.

Sections de $\pi : A \longrightarrow E$ et augmentations de $\mathcal{D}_A(\pi)$:
 Si $\sigma : E \longrightarrow A$ est une section de π , alors
 $\eta : A \longrightarrow \mathcal{D}_A(\pi)$, défini par $\eta(1) = \sigma$, est une aug-
 mentation de $\mathcal{D}_A(\pi)$. Réciproquement si $\eta : A \longrightarrow \mathcal{D}_A(\pi)$
 est une augmentation alors $\eta(1) : E \longrightarrow A$ est une section
 de π .

Si $\pi : E \longrightarrow C$ est un fibré sur une DG-coalgèbre C
dont la fibre est de dimension finie en chaque degré et
 $\pi^* : A \longrightarrow E^*$ le fibré dual, alors $\mathcal{D}_C(\pi) \cong \mathcal{D}_A(\pi^*)$.
 L'isomorphisme de DG-coalgèbres/A

$$\psi : \mathcal{D}_C(\pi) \longrightarrow \mathcal{D}_A(\pi^*)$$

est défini par $\varphi \longrightarrow (\lambda \longrightarrow \lambda \circ \varphi \in C^* = A)$, $\lambda \in E^*$.
 Cet isomorphisme est fonctoriel par rapport aux changements
 de base, i.e. le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_C(\pi_f) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{D}_{A'}(\pi_{f'}^*) \\ \parallel & & \parallel \\ A' \otimes_A \mathcal{D}_C(\pi) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \psi} & A' \otimes_A \mathcal{D}_A(\pi^*) \end{array}$$

4.3 Proposition : Soient C une DG-coalgèbre et A une
 DG-algèbre. Supposons qu'il existe un $n \geq 0$ tel
 que $C_p = 0$ (resp. $A^p = 0$) lorsque $p > n$.

Alors :

(1) $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres/ $C^* F^2$ -libres comme C^* -modules si et seulement si $\mathcal{F}_C(\alpha) : C \otimes_A \mathcal{X} \longrightarrow C \otimes_A \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme de fibrés sur C .

(2) $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres/ $A F^2$ -libres comme A -modules et telles que $K \otimes_A \mathcal{X}$ et $K \otimes_A \mathcal{X}'$ soient de dimension finie en chaque degré, si et seulement si $\mathcal{F}_A(\alpha) : \text{Hom}_A(\mathcal{X}', A) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A)$ est un quasi-isomorphisme de fibrés sur A .

Démonstration : (1) D'après (2.3), $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\alpha^K : F \longrightarrow F'$, où $F = K \otimes_A \mathcal{X}$ et $F' = K \otimes_A \mathcal{X}'$ munis des différentielles induites est un quasi-isomorphisme. Or $F = K \square_C (C \otimes_A \mathcal{X}) = K \square_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X})$ et $F' = K \square_C \mathcal{F}_C(\mathcal{X}')$ munis des différentielles induites et $\mathcal{F}_C(\alpha)^K = K \square_C \mathcal{F}_C(\alpha) : F \longrightarrow F'$ est évidemment égal à α^K . Mais, d'après (2.8), $\mathcal{F}(\alpha)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\mathcal{F}(\alpha)^K$ en est un. D'où (1).

(2) Comme dans (1), d'après (2.3), $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme induit $\alpha^K : F \longrightarrow F'$ est un quasi-isomorphisme. Or $F^* = K \otimes_A \text{Hom}_A(\mathcal{X}, A)$ et $F'^* = K \otimes_A \text{Hom}_A(\mathcal{X}', A)$ munis des différentielles induites et $\mathcal{F}_A(\alpha)^K = K \otimes_A \mathcal{F}_A(\alpha)$ est égal à $(\alpha^K)^* : F'^* \longrightarrow F^*$. Mais, d'après (2.5),

$\mathcal{F}_A(\alpha)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\mathcal{F}_A(\alpha)^K$ en est un. D'où (2).

Analogie avec les formes différentielles définies sur la base et à valeurs dans les courants sur la fibre.

Désignons par Ω_X les formes différentielles sur une variété différentiable X avec la topologie C^∞ et par Ω'_X les courants sur X (dual topologique de Ω_X).

Soit $p : X \rightarrow Y$ un fibré différentiable localement trivial et supposons pour simplifier que X et Y soient compacts. Il induit un morphisme de DG-algèbres

$p^* : \Omega_Y \rightarrow \Omega_X$. Considérons Ω_X muni de la structure de DG-module sur Ω_Y définie par p^* . L'analogue du foncteur $\mathcal{D}_{\Omega_Y} = \text{Hom}_{\Omega_Y}(_, \Omega_Y)$ fait correspondre au fibré p la coalgèbre "topologique" (le produit tensoriel étant remplacé par un produit complété convenable)

$\text{Hom}_{\Omega_Y}^{\text{cont}}(\Omega_X, \Omega_Y)$ dont les éléments sont les applications Ω_Y -linéaire continues de Ω_X dans Ω_Y . On peut interpréter $\text{Hom}_{\Omega_Y}^{\text{cont}}(\Omega_X, \Omega_Y)$ comme étant l'espace des sections du faisceau sur Y qui à un ouvert $U \subset Y$ fait correspondre

$\text{Hom}_{\Omega_U}^{\text{cont}}(\Omega_{p^{-1}(U)}, \Omega_U)$. Supposons que p soit trivial au-dessus de U . Alors $\text{Hom}_{\Omega_U}^{\text{cont}}(\Omega_{p^{-1}(U)}, \Omega_U) =$

$$= \text{Hom}_{\Omega_U}^{\text{cont}}(\Omega_U \times_Z \Omega_U) \approx \text{Hom}_{\Omega_U}^{\text{cont}}(\Omega_U \hat{\otimes} \Omega_Z, \Omega_U) \approx \text{Hom}^{\text{cont}}(\Omega_Z, \Omega_U)$$

$\approx \text{Hom}^{\text{cont}}(\Omega_Z, \Omega_U) \approx \Omega_U \hat{\otimes} \Omega'_Z$. Autrement dit, un élément

de $\text{Hom}_{\Omega_U}^{\text{cont}}(\Omega_{p^{-1}(U)}, \Omega_U)$ peut s'interpréter comme une forme différentielle sur U à valeurs dans les courants Ω'_Z .

Il s'ensuit qu'un élément de $\text{Hom}_{\Omega_Y}^{\text{cont}}(\Omega_X, \Omega_Y)$ peut s'interpréter comme une forme différentielle sur Y à valeurs dans le fibré vectoriel des courants sur les fibres.

Les fibres étant orientées, un exemple est donné par l'intégration sur les fibres.

5 . LES FONCTEURS $\mathcal{C}_A$ ET $\mathcal{L}_A$ DE QUILLEN

Le foncteur $\mathcal{C}_A$.

Soient A une DG-algèbre et L une DG-algèbre de Lie/ A .
Par définition la DG-coalgèbre/ A des chaînes sur L , notée $\mathcal{C}_A(L)$, est la coalgèbre $S_A(sL)$ (voir section 1) munie de la différentielle définie de la façon suivante : si $x_1, \dots, x_n$ sont n éléments de L , on pose

$$\begin{aligned} d(sx_1 \, sx_2 \, \dots \, sx_n) &= \\ &= \sum_k (-1)^{\epsilon_k} \, sx_1 \, \dots \, sdx_k \, \dots \, sx_n + \\ &+ \sum_{1 < j} (-1)^{\epsilon_{1j}} \, s[x_1, x_j] \, sx_1 \, \dots \, \hat{s}x_1 \, \dots \, \hat{s}x_j \, \dots \, sx_n \end{aligned}$$

(pour les signes, voir [8] page 506) . En appliquant le corollaire (1.4), on voit que d est la codérivation de $S_A(sL)$ qui correspond au morphisme de DG-module/ A $S_A(sL) \longrightarrow sL$ défini par $sx \longmapsto - \, sdx$, $sx_1 \, sx_2 \longrightarrow s[x_1, x_2]$ et $sx_1 \, sx_2 \, \dots \, sx_n \longmapsto 0$ si $n > 2$. En appliquant encore (1.4), on voit immédiatement que $d^2 = 0$.

Soit $f : L \longrightarrow L'$ un morphisme de DG-algèbres de Lie/ A . Il lui correspond un morphisme de DG-coalgèbres/ A $\mathcal{C}_A(f) : \mathcal{C}_A(L) \longrightarrow \mathcal{C}_A(L')$ obtenu en relevant le morphisme de modules sur A $S_A(sL) \xrightarrow{j} sL \xrightarrow{sfs^{-1}} sL'$ par la propriété universelle de S_A (proposition 1.3) . Pour

voir que $\mathcal{C}_A(f)d = d \mathcal{C}_A(f)$ il suffit de voir que $j d \mathcal{C}_A(f) = j \mathcal{C}_A(f) d$, ce que l'on vérifie directement.

Changement de base : Soit $A \longrightarrow A'$ un morphisme de DG-algèbres. Alors $\mathcal{C}_{A'}(A' \otimes_A L) = A' \otimes_A \mathcal{C}_A(L)$, car $s(A' \otimes_A L) = A' \otimes_A sL$, $S_{A'}(A' \otimes_A sL) = A' \otimes_A S_A(sL)$ et la formule pour la différentielle montre que $\mathcal{C}_{A'}(A' \otimes_A L) = A' \otimes_A \mathcal{C}_A(L)$ puisque $[a'_1 \otimes_A x_1, a'_2 \otimes_A x_2] = (-1)^{\deg a'_2 \deg x_1} a'_1 a'_2 \otimes_A [x_1, x_2]$.

Le foncteur $\mathcal{L}_A$

Soient A une DG-algèbre et $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A augmentée. Soient $\eta : A \longrightarrow \mathcal{X}$ et $\varepsilon : \mathcal{X} \longrightarrow A$ respectivement l'augmentation et la co-unité de $\mathcal{X}$. Posons $\overline{\mathcal{X}} = \text{Ker } \varepsilon$. On a une projection $\mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathcal{X}}$ définie par $\xi \longmapsto \overline{\xi} = \xi - \eta \varepsilon \xi$.

On associe à $\mathcal{X}$ une DG-algèbre de Lie/ A , notée $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, de la façon suivante : c'est l'algèbre de Lie sur A libre sur $s^{-1} \overline{\mathcal{X}}$, $\mathcal{L}_A(s^{-1} \overline{\mathcal{X}})$, munie de la différentielle obtenue en étendant selon une dérivation le morphisme de DG-modules/ A de degré -1

$$d : s^{-1} \overline{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{L}_A(s^{-1} \overline{\mathcal{X}})$$

défini par $d(s^{-1} \bar{\xi}) = -s^{-1} \overline{d\xi} - \frac{1}{2} \sum_1 (-1)^{\deg \xi'_1} [s^{-1} \bar{\xi}'_1, s^{-1} \bar{\xi}''_1]$,

$$\text{si } \Delta \xi = \sum_1 \xi'_1 \otimes_A \xi''_1.$$

Si l'on étend d en une dérivation D de

$$U_A(L_A(s^{-1} \bar{\mathcal{X}})) = T_A(s^{-1} \bar{\mathcal{X}}), \text{ on a :}$$

$$D(s^{-1} \bar{\xi}) = -s^{-1} \overline{d\xi} - \sum_1 (-1)^{\deg \xi'_1} s^{-1} \bar{\xi}'_1 \cdot s^{-1} \bar{\xi}''_1,$$

et l'associativité de C entraîne $D^2 = 0$. D'où $d^2 = 0$.

Soit $g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ un morphisme de DG-coalgèbres/ A .

Il lui correspond le morphisme de DG-algèbres de Lie/ A

$L_A(g) : L_A(\mathcal{X}) \longrightarrow L_A(\mathcal{X}')$ obtenu en étendant le morphisme de DG-modules/ A $s^{-1} \bar{\mathcal{X}} \xrightarrow{s^{-1}g} s^{-1} \bar{\mathcal{X}}' \longrightarrow L_A(s^{-1} \bar{\mathcal{X}}')$ par la propriété universelle des algèbres de Lie libres.

Changement de base : Soit $A \longrightarrow A'$ un morphisme de

DG-algèbres et considérons A' comme un DG-module/ A .

Alors $L_{A'}(A' \otimes_A \mathcal{X}) = A' \otimes_A L_A(\mathcal{X})$, car $\overline{A' \otimes_A \mathcal{X}} = A' \otimes_A \bar{\mathcal{X}}$,

$L_A(s^{-1}(A' \otimes_A \bar{\mathcal{X}})) = A' \otimes_A L_A(s^{-1} \bar{\mathcal{X}})$ et $[a'_1 \otimes_A s^{-1} \bar{\xi}_1, a'_2 \otimes_A s^{-1} \bar{\xi}_2]$

$$= (-1)^{\deg a'_2 (\deg \xi_1^{-1})} a'_1 a'_2 \otimes_A [s^{-1} \bar{\xi}_1, s^{-1} \bar{\xi}_2].$$

Les morphismes d'adjonction

Lorsque L est une DG-algèbre de Lie/A, par la propriété universelle appliquée à la projection $s^{-1}S_A(sL)$
 $\xrightarrow{s^{-1}s_j} L$, on obtient un morphisme de DG-algèbres de Lie/A

$$\alpha : {}_A\mathcal{C}_A(L) \longrightarrow L$$

comme on peut vérifier directement .

De même, lorsque $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/A $\mathbb{Q}$ -connexe, par la propriété universelle de S_A , le morphisme de A-modules $\mathcal{X} \longrightarrow s {}_A\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, défini par la composition
 $\mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathcal{X}} \longrightarrow sL_A(s^{-1}\mathcal{X})$, se relève en un morphisme $\mathcal{X} \longrightarrow S_A(s {}_A\mathcal{L}_A(\mathcal{X}))$ de coalgèbres sur A . On obtient ainsi un morphisme de DG-coalgèbres/A

$$\beta : \mathcal{X} \longrightarrow {}_A\mathcal{C}_A\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$$

car il suffit de vérifier que

$j\delta\beta = j\beta\delta$ et cette égalité est immédiate .

Le cas $A = K$

Lorsque $A = K$, les foncteurs $\mathcal{C} = \mathcal{C}_K$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_K$ ont été définis par Quillen [12] . Dans ce cas, ces foncteurs jouissent des propriétés suivantes :

(i) Si L et L' sont des DG-algèbres de Lie réduites (i.e. $L_p = L'_p = 0$ si $p \leq 0$) et $f : L \longrightarrow L'$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres de Lie, alors $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(L) \longrightarrow \mathcal{C}(L')$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres [11] , [12] .

(ii) Si C et C' sont des DG-coalgèbres 1-réduites (i.e. $C_p = C'_p = 0$ si $p \leq 1$, $p \neq 0$ et $C_0 = C'_0 = K$) et $f : C \longrightarrow C'$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres , alors $\mathcal{L}(f) : \mathcal{L}(C) \longrightarrow \mathcal{L}(C')$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres de Lie, [11] , [12] .

(iii) Les morphismes

$$\alpha : \mathcal{L}\mathcal{C}(L) \longrightarrow L$$

et
$$\beta : C \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{L}(C)$$

sont des quasi-isomorphismes respectivement de DG-algèbres de Lie et de DG-coalgèbres si L et C sont 0-réduites (i.e. $L_p = 0$ si $p \leq 0$ et $C_p = 0$ si $p < 0$, $C_0 = K$) . [11] (Pour la démonstration de [12] il faut supposer que $C_1 = 0$) .

Nous allons voir dans la proposition (5.1) que ces propriétés s'étendent à certaines catégories de DG-coalgèbres/ A et de DG-algèbres de Lie/ A , où A est une DG-algèbre telle que $A^p = 0$ lorsque p est suffisamment grand . Pour cela nous avons besoin d'un lemme technique .

DG-coalgèbres/A et DG-algèbres de Lie/A F^2 -libres :

Soit A une DG-algèbre augmentée. On dira que $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/A F^2 -libre si $\mathcal{X}$ est une DG-coalgèbre/A telle qu'il existe un isomorphisme $\varphi : A \otimes \mathcal{X}^K \longrightarrow \mathcal{X}$ de modules sur A, où $\mathcal{X}^K = K \otimes_A \mathcal{X}$ munie de la structure induite de DG-coalgèbre, vérifiant :

(a) la condition (F^2) (autrement dit, si $\mathcal{X}$ est un DG-module/A F^2 -libre) et

(b) la condition $\Delta \varphi(1 \otimes y) = \sum_1 \varphi(1 \otimes y'_1) \otimes_A \varphi(1 \otimes y''_1) \in F^2 \mathcal{X}$, si $\Delta_{\mathcal{X}} K y = \sum_1 y'_1 \otimes y''_1$, quelque soit

$y \in \mathcal{X}^K$ ($F\mathcal{X}$ désigne la filtration naturelle de $\mathcal{X}$ comme A-module).

De même, on dira que L est une DG-algèbre de Lie/A F^2 -libre si L est une DG-algèbre de Lie/A telle qu'il existe un isomorphisme de A-modules $\varphi : A \otimes L^K \longrightarrow L$, où $L^K = K \otimes_A L$ munie de la structure induite de DG-algèbre de Lie, vérifiant

(a) la condition (F^2) (autrement dit, si L est un DG-module/A F^2 -libre) et

(b) la condition $[\varphi(1 \otimes \ell), \varphi(1 \otimes \ell')] - \varphi(1 \otimes [\ell, \ell']) \in F^2 L$ quelques soient $\ell, \ell' \in L^K$, où FL est la filtration naturelle de L comme A-module.

Lemme : Soit A une DG-algèbre augmentée .

(1) Soit L une DG-algèbre de Lie/A F^2 -libre.

Alors $\mathcal{C}_A(L)$ est une DG-coalgèbre/A F^2 -libre.

(2) Soit $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/A F^2 -libre. Alors

$\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ est une DG-algèbre de Lie/A F^2 -libre .

Démonstration : (1) Soit $A \otimes L^K \xrightarrow{\sim} L$ un isomorphisme de modules sur A vérifiant les conditions (a) et (b) .

Il induit un isomorphisme $\mathcal{C}_A(L) \sim A \otimes \mathcal{C}_K(L^K)$ de modules sur A , car $\mathcal{C}_A(A \otimes L^K) = A \otimes \mathcal{C}_K(L^K)$, et si l'on identifie par cet isomorphisme $\mathcal{C}_A(L)$ à $A \otimes \mathcal{C}_K(L^K)$, on a :

$$\begin{aligned} & d(1 \otimes sl . sl') - 1 \otimes d(sl . sl') = \\ & = (-sd(1 \otimes l) + 1 \otimes sdl)(1 \otimes sl') + (-1)^{\deg l}(1 \otimes sl)(sd(1 \otimes l' \\ & - 1 \otimes sdl')) - (s[1 \otimes l, 1 \otimes l'] - 1 \otimes s[l, l']) \in F^2 \mathcal{C}_A(L). \end{aligned}$$

On voit, de même, que de façon générale $d(1 \otimes sl_1 \dots sl_n) - 1 \otimes d(sl_1 \dots sl_n) \in F^2 \mathcal{C}_A(L)$ pour tous les $l_1, \dots, l_n \in L$.

(2) Soit $A \otimes \mathcal{X}^K \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ un isomorphisme de modules sur A vérifiant (a) et (b) . Il induit un isomorphisme $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}) \approx A \otimes \mathcal{L}_K(\mathcal{X}^K)$ de modules sur A (et en fait d'algèbres de Lie sur A), car $\mathcal{L}_A(A \otimes \mathcal{X}^K) = A \otimes \mathcal{L}_K(\mathcal{X}^K)$. Pour tout $y \in \mathcal{X}^K$, on a :

$$\begin{aligned} & d(s^{-1}(1 \otimes \bar{y})) - 1 \otimes d(s^{-1}\bar{y}) = -s^{-1}d(1 \otimes \bar{y}) + \\ & + 1 \otimes s^{-1}d\bar{y} - \frac{1}{2} [,] (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{\mathcal{X}} (1 \otimes \bar{y}) + \\ & + \frac{1}{2} 1 \otimes [,] (s^{-1} \otimes s^{-1}) \Delta_{\mathcal{X}} \bar{y} \in F^2 \mathcal{L}_A(\mathcal{X}) , \text{ car} \\ & \Delta_{\mathcal{X}} (1 \otimes y) - 1 \otimes \Delta_{\mathcal{X}} \bar{y} \in F^2 \mathcal{X} \text{ et } [1 \otimes l, 1 \otimes l'] = \\ & = 1 \otimes [l, l'] , \text{ pour tous } l, l' \in \mathcal{L}_K(\mathcal{X}^K) . \text{ De façon ana-} \end{aligned}$$

logue, un calcul direct montre que si $\ell \in \mathcal{L}_K(\mathcal{X}^K)$ est un crochet de n éléments $s^{-1}\bar{y}_1, \dots, s^{-1}\bar{y}_n$, où $y_1 \in \mathcal{X}^K$, alors $d(1 \otimes \ell) = 1 \otimes d\ell \in F^2 \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$. Il en est donc de même pour tout élément $\ell \in \mathcal{L}_K(\mathcal{X}^K)$.

5.1 : Proposition : Soit A une DG-algèbre et supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $A^p = 0$ si $p > n$.

(1) Si $f : L \longrightarrow L'$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres de Lie/ A F^2 -libres et telles que

$$(K \otimes_A L)_p = (K \otimes_A L')_p = 0 \text{ si } p \leq 0, \text{ alors}$$

$\mathcal{C}_A(f) : \mathcal{C}_A(L) \longrightarrow \mathcal{C}_A(L')$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres/ A F^2 -libres et telles que $(K \otimes_A \mathcal{C}_A(L))_p = (K \otimes_A \mathcal{C}_A(L'))_p = 0$ si $p < 0$.

(2) Si $g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est un quasi-isomorphisme de DG-coalgèbres/ A F^2 -libres, augmentées et telles que $(K \otimes_A \mathcal{X})_p = (K \otimes_A \mathcal{X}')_p = 0$ si $p < 0$ ou $p = 1$, alors $\mathcal{L}_A(g) : \mathcal{L}_A(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{L}_A(\mathcal{X}')$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres de Lie/ A F^2 -libres et telles que $(K \otimes_A \mathcal{L}_A(\mathcal{X}))_p = (K \otimes_A \mathcal{L}_A(\mathcal{X}'))_p = 0$ si $p \leq 0$.

(3) Si L est une DG-algèbre de Lie/ A F^2 -libre telle que $(K \otimes_A L)_p = 0$ si $p \leq 0$ et $\mathcal{X}$ une DG-coalgèbre/ A F^2 -libre, augmentée et telle que $(K \otimes_A \mathcal{X})_p = 0$ si $p < 0$, alors les morphismes

$$\alpha : \mathcal{L}_A \mathcal{C}_A(L) \longrightarrow L$$

et
$$\beta : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}_A \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$$

sont des quasi-isomorphismes .

Démonstration : La proposition est vraie si $A = K$. Dans le cas général elle est une conséquence de (2.3) . En effet, (1) soit $f^K : L^K \longrightarrow L'^K$ le morphisme de DG-algèbres de Lie induit par f . D'après (2.3), f^K est un quasi-isomorphisme et il en est donc de même pour $\mathcal{C}(f^K) : \mathcal{C}(L^K) \longrightarrow \mathcal{C}(L'^K)$. Alors le lemme ci-dessus montre que l'on peut appliquer (2.3) pour conclure . (2) et (3) se démontrent par le même raisonnement en considérant respectivement le morphisme $g^K : \mathcal{X}^K \longrightarrow \mathcal{X}'^K$ induit par g et les morphismes $\alpha^K : \mathcal{L}\mathcal{C}(L^K) \longrightarrow L^K$ et $\beta^K : \mathcal{X}^K \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{L}(\mathcal{X}^K)$ induits par α et β .

6 . UN DICTIONNAIRE

Rappelons que si $\underline{C}$ est une catégorie et Σ une famille de morphismes de $\underline{C}$, alors la catégorie obtenue en localisant $\underline{C}$ relativement à Σ est la solution du problème universel suivant : il existe une catégorie $\underline{C}(\Sigma^{-1})$ et un foncteur $\gamma : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}(\Sigma^{-1})$ tels que : (i) pour tout $f \in \Sigma$, $\gamma(f)$ est un isomorphisme dans $\underline{C}(\Sigma^{-1})$ et (ii) pour tout foncteur $\gamma' : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ tel que, pour tout $f \in \Sigma$, $\gamma'(f)$ soit un isomorphisme dans $\underline{C}'$, il existe un et un seul foncteur $\Gamma : \underline{C}(\Sigma^{-1}) \longrightarrow \underline{C}'$ tel que $\gamma' = \Gamma\gamma$.

Soit A une DG-algèbre augmentée. Dans la section 5 nous avons défini les DG-coalgèbres/ A et les DG-algèbres de Lie/ A F^2 -libres. Pour l'uniformité du langage, on dira qu'une DG-algèbre/ A est F^2 -libre si c'est un fibré sur A vérifiant la condition (F^2) .

Avec cette terminologie nous pouvons énoncer le théorème suivant, si le corps de base est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

6.1 Théorème : Soient Y un complexe simplicial de dimension finie n et A une DG-algèbre augmentée telle que $A^p = 0$ si $p > n$ et qui représente le type d'homotopie rationnelle de Y .

Alors les catégories suivantes localisées relativement aux morphismes qui induisent des isomorphismes

sur l'homologie rationnelle sont équivalentes :

- (1) La catégorie des fibrés de Serre d'espaces connexes et pointés $p : X \longrightarrow Y$ munis d'une section (et on ne considère que les morphismes qui soient compatibles avec la section donnée) tels que p soit induit d'un fibré dont la base est 1-connexe et dont la fibre ait une homologie rationnelle de dimension finie en chaque degré et soit 1-connexe ;
- (2) la catégorie des DG-algèbres E sur A augmentées (les isomorphismes étant compatibles avec l'augmentation) telles que E soit F^2 -libre sur A , telles que $Q \otimes_A E$ soit de dimension finie en chaque degré et $(Q \otimes_A E)^p = 0$ si $p < 0$, $p = 1$, $(Q \otimes_A E)^0 = Q$;
- (3) la catégorie des DG-coalgèbres $\mathcal{X}$ sur A augmentées (les morphismes étant compatibles avec l'augmentation) telles que $\mathcal{X}$ soit F^2 -libre sur A , telles que $Q \otimes_A \mathcal{X}$ soit de dimension finie en chaque degré et $(Q \otimes_A \mathcal{X})_p = 0$ si $p < 0$, $p = 1$, $(Q \otimes_A \mathcal{X})_p = Q$;
- (4) la catégorie des DG-algèbres de Lie L sur A F^2 -libres et telles que $Q \otimes_A L$ soit de dimension finie en chaque degré et $(Q \otimes_A L)_p = 0$ si $p < 0$.

De plus ces équivalences sont fonctorielles par rapport aux changements de base .

La fonctorialité par rapport aux changements de base entraîne en particulier que si $Y = \text{un point}$ et $A = \mathbb{Q}$, alors ce dictionnaire est le dictionnaire pour le type d'homotopie rationnelle d'un espace 1-connexe cité dans l'introduction.

Egalement dans l'introduction, nous avons signalé que l'équivalence entre (1) et (2) est plus générale et découle de la théorie de Sullivan.

L'équivalence entre (2) et (3) a été démontrée à la section 4 et celle entre (3) et (4) a été démontrée à la section 5.

On dira d'un objet de (2), (3), ou (4) qu'il représente le type d'homotopie rationnelle sur A du fibré p dans (1).

Exemples

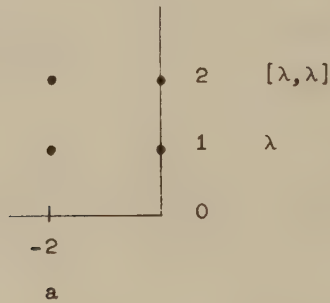
1. Le fibré trivial $S^2 \times S^2$ et les deux sections données respectivement par l'identité de S^2 et par une application constante.

Dans cet exemple nous voulons illustrer le fait que la DG-algèbre de Lie correspondant à un fibré avec section dépend en général de la classe d'homotopie de la section.

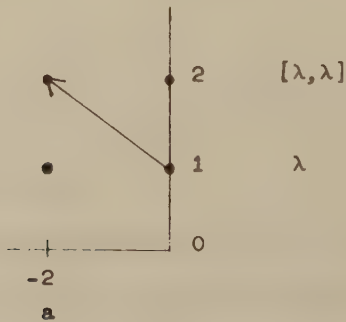
Soit $A = H^*(S^2, \mathbb{Q})$ et soit a le générateur de A . On a $\deg a = 2$ et $a^2 = 0$. $S^2 \times S^2$ est représenté par l'algèbre E sur A , libre comme A -module de base $1, x$, avec $\deg x = 2$, $x^2 = 0$, la différentielle étant triviale. Les sections $\sigma_0, \sigma_a : E \longrightarrow A$

correspondant respectivement aux sections données par une application constante et par l'identité de S^2 , sont définies par $\sigma_0(x) = 0$ et $\sigma_a(x) = a$. Alors :

(1) La DG-algèbre de Lie L^0 sur A correspondant à $A \longrightarrow E$ muni de la section σ_0 est un A -module libre de base $\lambda, [\lambda, \lambda]$, avec $\deg \lambda = 1$, la différentielle étant triviale. On peut représenter L^0 par le diagramme suivant :



(2) La DG-algèbre de Lie L^a sur A correspondant à $A \longrightarrow E$ muni de la section σ_a est un A -module libre de base $\lambda, [\lambda, \lambda]$, avec $\deg \lambda = 1$, la différentielle étant définie par $d\lambda = a[\lambda, \lambda]$. On peut représenter L^a par le diagramme suivant :



L^0 et L^a ne peuvent pas être équivalentes car $H(L^0)$ et $H(L^a)$ ne sont pas isomorphes .

Pour vérifier les affirmations (1) et (2), désignons par $\mathcal{X}$ la coalgèbre sur A duale sur A de E . C'est un A-module libre de base η, φ , base duale de 1 et x . On a $\Delta\eta = \eta \otimes_A \eta$ et $\Delta\varphi = \varphi \otimes_A \eta + \eta \otimes_A \varphi$ puisque dans E le produit (sur A) est trivial. Les sections σ_0 et σ_a induisent des augmentations η_0 et $\eta_a : A \longrightarrow \mathcal{X}$, définies par $\eta_0(1) = \eta$ et $\eta_a(1) = \eta + a\varphi$.

On notera $\mathcal{X}^0$ ou $\mathcal{X}^a$ selon que l'on considère $\mathcal{X}$ équipée de η_0 ou de η_a respectivement . Avec cette notation la projection naturelle $\mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathcal{X}} = \text{Ker}(\varepsilon : \mathcal{X} \longrightarrow A)$, définie par $\xi \longmapsto \xi - \eta\varepsilon\xi$, est donnée dans chacun des deux cas respectivement par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}^0 \\ \eta & \longmapsto & 0 \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}^a & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}^a \\ \eta & \longmapsto & -a\varphi \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

Rappelons en outre que la différentielle dans $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ est définie par $d(s^{-1}\xi) = -s^{-1}d\xi - \frac{1}{2} \sum_i (-1)^{\deg \xi'_i} 1 [\overline{s^{-1}\xi'_i}, s^{-1}\xi''_i]$

$$\text{si } \Delta_{\mathcal{X}}\xi = \sum_i \xi'_i \otimes \xi''_i .$$

Considérons $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0)$. C'est l'algèbre de Lie $L_A(s^{-1}\overline{\mathcal{X}}^0)$ munie de la différentielle triviale . On a donc $L^0 = \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0)$.

Considérons $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a)$. C'est l'algèbre de Lie $L_A(s^{-1}(\overline{\mathcal{X}}^a))$ telle que si $\lambda = s^{-1}\varphi$, alors

$$d\lambda = -\frac{1}{2} [\ , \] (s^{-1} \otimes s^{-1}) (-a\varphi \otimes \varphi - a\varphi \otimes \varphi) = a[\lambda, \lambda] \ .$$

$$\text{Donc } L^a = \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a) \ .$$

Remarque : Signalons qu'éventuellement on peut avoir la même algèbre de Lie pour deux sections non-homotopes . Considérons en effet le fibré trivial $S^3 \times S^2$ et les deux sections s et s' données respectivement par le fibré de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$ et par une application constante . Soit $A = H^*(S^3, \mathbb{Q})$. C'est une algèbre libre engendrée par un élément a de degré 3 . Soit $A \otimes S(x, y)$ le modèle minimal de $S^3 \times S^2$ sur A . On a $\deg x = 2$, $\deg y = 3$ et $dy = x^2$. Alors les morphismes $\sigma_a, \sigma_0 : A \otimes S(x, y) \longrightarrow A$ définis respectivement par $\sigma_a(x) = 0$, $\sigma_a(y) = a$ et $\sigma_0(x) = \sigma_0(y) = 0$, correspondent respectivement à s et s' . Or $x \mapsto x$, $y \mapsto y - a$ définit un automorphisme ψ de DG-algèbres/ A de $A \otimes S(x, y)$ tel que $\sigma_a \psi = \sigma_0$. Donc dans les deux cas $S^3 \times S^2$ peut être représenté par l'algèbre de Lie $A \otimes L(\lambda)$, où $\deg \lambda = 1$.

2 . Un fibré sur S^2 de fibre $K(\mathbb{Q}, 4) \times K(\mathbb{Q}, 2)$, défini par un "crochet tordu".

Nous voulons donner un exemple où le type d'homotopie rationnelle du fibré est représenté par une algèbre de Lie (avec différentielle nulle) avec un "crochet tordu" .

Soit $A = H^*(S^2, \mathbb{Q})$ et soit $a \in A$ la classe fondamentale . Soit L l'algèbre de Lie de dimension 2 comme espace vectoriel

et base λ, μ avec $\deg \lambda = 3$, $\deg \mu = 8$, $d\lambda = d\mu = 0$,
 $[\lambda, \lambda] = [\mu, \mu] = [\lambda, \mu] = 0$.

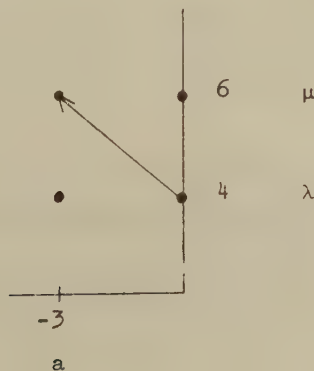
On définit sur $A \otimes L$ une structure de DG-algèbre de Lie/A en posant $[\lambda, \lambda] = a\mu$ ($[\mu, \mu] = [\lambda, \mu] = 0$, $d\lambda = d\mu = 0$). Elle représente le type d'homotopie rationnelle d'un fibré sur S^2 de fibre $K(\mathbb{Q}, 4) \times K(\mathbb{Q}, 9)$ dont le modèle minimal sur A est donné par l'algèbre $A(x, y)$ avec $\deg x = 4$, $\deg y = 9$, $dy = -ax^2$.

3. Un fibré sur S^3 de fibre $S^5 \times S^7$ défini par un crochet trivial et une différentielle "tordue".

Soit $S^{15} \rightarrow S^8$ le fibré de Hopf sur S^8 de fibre S^7 .

Soit $S^3 \times S^5 \rightarrow S^8$ une application de degré 1 et soit $E \rightarrow S^3 \times S^5$ le fibré induit par cette application.

Considérons le fibré $E \rightarrow S^3$ obtenu en projetant sur le premier facteur. C'est un fibré de fibre $S^5 \times S^7$ qui est représenté par une DG-algèbre de Lie sur $A = H^*(S^3)$, libre comme A-module de dim 2 avec une base λ, μ , avec $\deg \lambda = 4$, $\deg \mu = 6$, où tous les crochets sont nuls mais $d\lambda = a\mu$, a étant le générateur de A.



4 . Un fibré en projectif sur $\mathbb{CP}^2$ et deux sections non homotopes .

Comme dans l'exemple 1 , nous allons décrire deux DG-algèbres de Lie non-équivalentes qui représentent le type d'homotopie rationnelle du même fibré (non trivial) muni de deux sections non-homotopes .

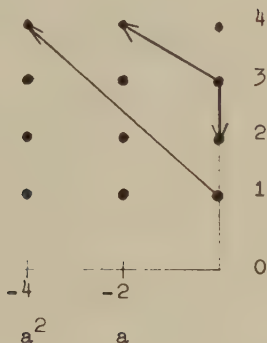
Signalons tout d'abord que F. RONGA a montré que si X est une variété différentiable de dimension $2n$, ξ un fibré vectoriel complexe de rang n et $a \in H^2(X, \mathbb{Z})$, alors on peut voir qu'il existe toujours une section σ_a du fibré $P(\xi \oplus \theta^1)$ en projectif associé à $\xi \oplus \theta^1$, où θ^1 est le fibré trivial de rang 1 , telle que si x est le générateur de $H^*(P(\xi \oplus \theta^1))$ comme $H^*(X)$ -module , alors $H^*(\sigma_a)(x) = a$. Cette section n'est pas homotope à la section σ_0 de $P(\xi \oplus \theta^1)$ induite par la section triviale non nulle de $\xi \oplus \theta^1$. (Dans ce cas on a $H^*(\sigma_0)(x) = 0$) .

Soit $\xi = \text{TCP}^2 \oplus \theta^1$ et considérons le fibré $P(\xi)$ sur $\mathbb{CP}^2$ de fibre $\mathbb{CP}^2$. Soit a le générateur de $A = H^*(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Q})$. Alors $E = H^*(P(\xi), \mathbb{Q}) = A[x]/(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x)$ et $A \longrightarrow E$ est un fibré sur A qui représente le type d'homotopie rationnelle de $P(\xi) \longrightarrow \mathbb{CP}^2$. Considérons les deux sections $\sigma_0 : E \longrightarrow A$ et $\sigma_a : E \longrightarrow A$ définies par $\sigma_0(x) = 0$ et $\sigma_a(x) = a$.

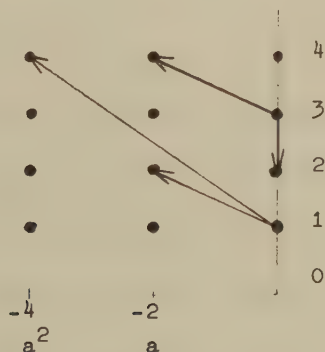
Alors on a :

(1) Muni de σ_0 , le fibré $A \longrightarrow E$ est représenté par une DG-algèbre de Lie L^0 libre comme A -module avec une base $\lambda, [\lambda, \lambda], \mu, [\lambda, \mu]$ (les autres crochets sont nuls) où

$\deg \lambda = 1$ et $\deg \mu = 3$, telle que $d_0 \lambda = 3a^2[\lambda, \mu]$ et $d_0 \mu = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - 3a[\lambda, \mu]$:



(2) Muni de σ_a , le fibré $A \longrightarrow E$ est représenté par une DG-algèbre de Lie L^a libre comme A -module avec une base $\lambda, [\lambda, \lambda], \mu, [\lambda, \mu]$ (les autres crochets sont nuls) où $\deg \lambda = 1$ et $\deg \mu = 3$, telle que $d_a \lambda = a[\lambda, \lambda] + 4a^2[\lambda, \mu]$ et $d_a \mu = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - 2a[\lambda, \mu]$:



L^0 et L^a ne peuvent pas être équivalentes, car $H^0(L^0) = H^1(L^0) = 0$ (on a $a[\lambda, \lambda] = d_0(-2(\lambda + a\mu))$, $a^2[\lambda, \mu] = d_0(\frac{1}{3}\lambda)$ et $d(r\lambda + sa\mu) \neq 0$, pour tous $r, s \in \mathbb{Q}$)

alors que $H^0(L^a)$ et $H^1(L^a)$ sont tous deux de dimension 1
(et de base respectivement la classe de $a[\lambda, \lambda]$ et la classe
de $\lambda + 2a\mu$).

Pour montrer (1) et (2), considérons la DG-coalgèbre/A
duale de E : $\mathcal{X} = \text{Hom}_A(E, A)$. C'est un A-module libre de
base η, φ, ψ , base duale de 1, x, y = x^2 de E comme
A-module. On vérifie que $\Delta\eta = \eta \otimes \eta$, $\Delta\varphi = \eta \otimes \varphi + \varphi \otimes \eta -$
 $- 3a^2(\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi)$, $\Delta\psi = \eta \otimes \psi + \psi \otimes \eta + \varphi \otimes \varphi + 3a(\varphi \otimes \psi + \psi \otimes$

Soient $\eta_0, \eta_a : A \longrightarrow \mathcal{X}$ les augmentations duales de
 σ_0 et σ_a . On a $\eta_0(1) = \eta$ et $\eta_a(1) = \eta + a\varphi + a^2\psi$. Désignons
par $\mathcal{X}^0$ ou par $\mathcal{X}^a$ lorsqu'on considère $\mathcal{X}$ munie de η_0 ou
de η_a . Alors les projections sont données par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}^0 \\ \eta & \longmapsto & 0 \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \\ \psi & \longmapsto & \psi \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}^a & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}^a \\ \eta & \longmapsto & -a\varphi - a^2\psi \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \\ \psi & \longmapsto & \psi \end{array}$$

Considérons les DG-algèbres de Lie $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0)$ et
 $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a)$ sur A et désignons par d_0, d_a les différentielles
respectives et soient $\lambda = s^{-1}\varphi$ et $\mu = s^{-1}\psi$. On a
 $d_0\lambda = 3a^2[\lambda, \mu]$, $d_0\mu = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - 3a[\lambda, \mu]$, et
 $d_a\lambda = a[\lambda, \lambda] + 4a^2[\lambda, \mu]$, $d_a\mu = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda] - 2a[\lambda, \mu] - a^2[\mu, \mu]$.

Soit I l'idéal dans $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0)$ ou dans $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a)$
engendré par $[\mu, \mu]$ et les crochets de longueur > 2 . Alors
les projections $\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0) \longrightarrow L^0 = \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0) / I$ et

$\mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a) \longrightarrow L^a = \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a) / I$ sont des quasi-isomorphismes . Pour le voir on remarque que L^0 et L^a sont F^2 -libres comme A -modules et que les projections induisent des quasi-isomorphismes $K \otimes_A \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^0) \longrightarrow K \otimes_A L^0$ et

$$K \otimes_A \mathcal{L}_A(\mathcal{X}^a) \longrightarrow K \otimes_A L^a .$$

7 . UN MODELE POUR L'ESPACE DES SECTIONS .

Soit $p : X \longrightarrow Y$ un fibré de Serre d'espaces pointés muni d'une section $s : Y \longrightarrow X$ et satisfaisant les conditions (1) du théorème 6.1 . Soient A une DG-algèbre de dimension (totale) finie qui représente le type d'homotopie rationnelle de Y et L une DG-algèbre de Lie/ A qui représente le type d'homotopie rationnelle de p . Nous allons voir que L , considérée comme DG-algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$, contient une sous-DG-algèbre de Lie L_+ telle que la DG-algèbre $\mathcal{E}^*(L_+)$ des cochaînes sur L_+ représente le type d'homotopie rationnelle de la composante connexe de s dans l'espace des sections continues de p . (Théorème 7.3) .

Construction d'un modèle algébrique .

Soient C une DG-coalgèbre (augmentée) et n un entier ≥ 0 tel que $C_p = 0$ si $p > n$. Soit $\pi : E \longrightarrow C$ un fibré sur C vérifiant la condition (F^2) et supposons que la fibre F de π soit de dimension finie en chaque degré et telle que $F_0 = K$, $F_1 = 0$.. Soit $\sigma : C \longrightarrow E$ une section de π .

Soient $A = C^*$ la DG-algèbre duale de C et L une DG-algèbre de Lie/ A F^2 -libre et dont la classe d'équivalence correspond à la classe d'équivalence de π muni de σ . (En particulier $L \sim \mathcal{L}_A(\mathcal{D}_C(\pi))$) . On peut supposer sans perte de généralité que $(K \otimes_A L)$ est de dimension finie et

nul si $p \leq 0$.

Considérons L comme une DG-algèbre de Lie (sur K) et désignons par L_+ la sous-DG-algèbre de Lie de L telle que $(L_+)_p = L_p$ si $p > 0$, $(L_+)_0 = \text{Ker}(d : L_0 \rightarrow L_{-1})$ et $(L_+)_p = 0$ si $p < 0$.

• Le morphisme d'évaluation. Considérons le morphisme

$$\tilde{\text{ev}} : \mathcal{C}_K(L_+) \longrightarrow \mathcal{C}_A(L)$$

défini en faisant suivre $S_K(sL_+) \rightarrow S_K(sL)$ du morphisme $S_u : S_K(sL) \rightarrow S_A(sL)$ (voir (1.5)). C'est un morphisme de DG-coalgèbres sur $u : K \rightarrow A$ de $\mathcal{C}_K(L_+)$ dans $\mathcal{C}_A(L)$. En effet, d'après (1.5) il existe une unique différentielle sur $S_K(sL)$ (et donc sur $S_K(sL_+)$) telle que $S_u : S_K(sL) \rightarrow \mathcal{C}_A(L)$ soit un morphisme de DG-coalgèbres sur $u : K \rightarrow A$. Or il est clair que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_K(L_+) & \xrightarrow{\tilde{\text{ev}}} & \mathcal{C}_A(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ sL_+ & \xrightarrow{\quad} & sL \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles qui caractérisent les différentielles de $\mathcal{C}_K$ et $\mathcal{C}_A$, à savoir $sx_1 \mapsto -sdx_1$, $sx_1sx_2 \mapsto s[x_1, x_2]$ et $sx_1sx_2 \dots sx_n \mapsto 0$ si $n > 2$ (voir section 5).

On définit alors l'évaluation comme étant le morphisme de fibrés sur C

$$ev : C \otimes \mathcal{E}_K(L_+) \longrightarrow C \otimes_A \mathcal{E}_A(L) = \mathcal{F}_C(\mathcal{E}_A(L))$$

obtenu en faisant suivre $id \otimes \tilde{ev}$ de la projection naturelle .

Soit $L = A \otimes_A (K \otimes L)$ un isomorphisme de A-modules . Il induit un isomorphisme de A-modules

$$\varphi : \mathcal{E}_A(L) \xrightarrow{\sim} A \otimes \mathcal{E}_K(K \otimes L) \quad \text{et l'on a que}$$

$$(\varphi \circ ev) : C \otimes \mathcal{E}_K(L_+) \longrightarrow C \otimes \mathcal{E}_K(K \otimes L) \quad \text{est donné par}$$

$$(\varphi \circ ev)(c \otimes (a_1 \otimes sx_1) \dots (a_p \otimes sx_p)) = \pm ca_1 \dots a_p \otimes sx_1 \dots sx_p$$

(où le signe est déterminé par la permutation des variables et $ca_1 \dots a_p$ est donné par la structure de A-module sur C) .

La propriété universelle .

7.1 Proposition : Soient $\pi : E \longrightarrow C$ et L comme ci-dessus . Alors pour toute DG-coalgèbre B telle que $B_0 = K$ et tout morphisme de fibrés sur C

$$\Phi : C \otimes B \longrightarrow C \otimes_A \mathcal{E}_A(L)$$

il existe un et un seul morphisme de DG-coalgèbres

$\varphi : B \longrightarrow \mathcal{E}_K(L_+)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes \mathcal{C}_K(L_+) & \xrightarrow{\text{ev}} & C \otimes_A \mathcal{C}_A(L) \\
 \text{id} \otimes \varphi \swarrow & & \nearrow \Phi \\
 & C \otimes B &
 \end{array}$$

Démonstration : à Φ correspond un et un seul morphisme $\psi : B \longrightarrow \mathcal{C}_A(L)$ de DG-coalgèbres sur $u : K \longrightarrow A$ (voir la remarque suivant 4.1) . D'après (1.5) il existe un unique morphisme de DG-coalgèbres $\varphi : B \longrightarrow S_K(sL)$ tel que $S_u \varphi = \psi$. En fait on a $\varphi : B \longrightarrow \mathcal{C}(L_+)$ car si $j : S_K(sL) \longrightarrow sL$ est la projection naturelle , alors $j\varphi(B) \subset sL_+$, puisque φ commute avec les différentielles et $dB_1 = 0$. Donc, si $c \in C$, $b \in B$, on a $\text{ev}(\text{id} \otimes \varphi)(c \otimes b) = c \otimes_A \psi(b) = \Phi(c \otimes b)$ (voir aussi la remarque suivant (4.1)) . D'où la propriété universelle .

En dualisant nous obtenons le corollaire suivant :

7.2 Corollaire : Soit A une DG-algèbre (augmentée)

de dimension (totale) finie et soit $\pi : A \longrightarrow E$ un fibré sur A vérifiant la condition (F^2) , muni d'une section $\sigma : E \longrightarrow A$, et dont la fibre F est de dimension finie en chaque degré et telle que $F^0 = K$, $F^1 = 0$. Soit L une DG-algèbre de Lie/ A F^2 -libre et dont la classe d'équivalence correspond à la classe d'équivalence de π muni de $\sigma(L \sim \mathcal{L}_A(\mathcal{D}_A(\pi))$. Alors, pour toute DG-coalgèbre B telle que

$B_0 = K$ et tout morphisme $\Phi^* : \text{Hom}_A(\mathcal{C}_A(L), A) \rightarrow A \otimes B^*$ de DG-algèbres sur A , il existe un et un seul morphisme de DG-algèbres $\varphi^* : \mathcal{C}^*(L_+) \rightarrow B^*$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathcal{C}^*(L_+) & \xleftarrow{\text{ev}^*} & \text{Hom}_A(\mathcal{C}_A(L), A) \\ & \searrow \text{id} \otimes \varphi^* & \swarrow \Phi^* \\ & A \otimes B^* & \end{array}$$

Remarquons que si $L \approx A \otimes (K \otimes L)$ est un isomorphisme de A -modules, si $\varphi : A \otimes \mathcal{C}^*_{K(K \otimes L)} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(\mathcal{C}_A(L), A)$ est l'isomorphisme induit, et si l'on fait l'identification naturelle de $A \otimes S^*(sL)$ avec la DG-algèbre $S^*(sL, A)$ des formes multilinéaires symétriques sur sL à valeurs dans A , alors on a que $(\text{ev}^* \circ \varphi) : A \otimes \mathcal{C}^*_{K(K \otimes L)} \rightarrow \mathcal{C}^*_{K(L, A)}$ est donnée par $(\text{ev}^* \circ \varphi)(a \otimes \lambda)(s(a_1 \otimes x_1), \dots, s(a_p \otimes x_p)) = \pm a a_1 \dots a_p \lambda(sx_1, \dots, sx_p)$.

Le modèle de Sullivan ([14] page 314, [9] pages 37-56, [10], pages 150-151, [16] pages 73-85).

Soient C une DG-coalgèbre de dimension (totale) finie et $A = C^*$ la DG-algèbre duale. Soit $\pi : E \rightarrow A$ un fibré sur A tel que E soit de la forme $A \otimes S(V)$ comme algèbre sur A , V étant de dimension finie en chaque degré et tel que $v^p = 0$ si $p \leq 1$. Soit $\sigma : E \rightarrow A$ une section de π .

Quitte à faire un changement de base (et changer la différentielle en conséquence) , on peut supposer que σ est de la forme $\text{id} \otimes \epsilon : A \otimes S(V) \longrightarrow A$ (où $\epsilon : S(V) \longrightarrow K$ est l'augmentation naturelle) .

Le modèle de Sullivan de l'espace des sections de π homotopes à la section correspondante à σ est défini de la façon suivante : considérons l'algèbre $S(V \otimes C)$ et le morphisme d'algèbres graduées

$$e' : A \otimes S(V) \longrightarrow \text{Hom}(C, S(V \otimes C)) \cong A \otimes S(V \otimes C)$$

défini en posant $e'(v)(c) = v \otimes c$ et en étendant selon un morphisme d'algèbres sur A (par abus de notation on désigne par v l'élément $1 \otimes v \in A \otimes V$) . La dérivation d sur $S(V \otimes C)$ obtenue en étendant l'égalité

$$d(v \otimes c) = e'(dv)(c) + (-1)^{\deg v} v \otimes dc$$

est l'unique différentielle telle que $de' = e'd$.

Le fait que $e'd = de'$ est évident et entraîne que $d^2 = 0$ car $d^2(v \otimes c) = d(e'(dv))(c) + (-1)^{\deg v} d(v \otimes dc) = e'(d^2v)(c) + (-1)^{\deg v + 1} e'(dv)(dc) + (-1)^{\deg v} e'(dv)(dc) = 0$.

Muni de cette différentielle , $S(V \otimes C)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute DG-algèbre B augmentée (non nécessairement positivement graduée) et tout morphisme de DG-algèbres $\Phi : E = A \otimes S(V) \longrightarrow A \otimes B$ il existe un morphisme de DG-algèbres et un seul $\phi : S(V \otimes C) \longrightarrow B$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes S(V) & \xrightarrow{e'} & A \otimes S(V \otimes C) \\
 \searrow \Phi & & \searrow \text{id} \otimes \varphi \\
 & & A \otimes B \approx \text{Hom}(C, B)
 \end{array}$$

On définit φ en posant $\varphi(v \otimes c) = \Phi(v)(c)$ et on étend en un morphisme d'algèbres graduées. Il est clair que $(\text{id} \otimes \varphi)e' = \Phi$ et on vérifie directement que $d\varphi = \varphi d$.

Considérons dans $S(V \otimes C)$ l'idéal I engendré par les éléments de $V \otimes C$ de degré ≤ 0 et de leurs différentielles (pour la différentielle induite sur $V \otimes C$).

Désignons par Γ la DG-algèbre quotient $S(V \otimes C) / I$ et désignons par

$$e : E \longrightarrow A \otimes \Gamma$$

le morphisme de DG-algèbres obtenu en faisant suivre e' de la projection naturelle. Alors e vérifie la propriété universelle décrite par le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & A \otimes \Gamma \\
 \searrow \Phi & & \searrow \text{id} \otimes \varphi \\
 & & A \otimes B
 \end{array}$$

pour toute DG-algèbre B telle que $B^p = 0$ si $p < 0$ et $B^0 = K$ et tout morphisme Φ de DG-algèbres augmentées sur A . (Car il existe un morphisme et un seul de DG-algèbres $\varphi' : S(V \otimes C) \longrightarrow B$ tel que $(\text{id} \otimes \varphi')e' = \Phi$ et φ' passe au quotient car $(\text{id} \otimes \varepsilon) = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Phi = \text{id} \otimes \varepsilon$).

Soit U le sous-espace de $V \otimes C$ formé des éléments de degré ≤ 0 et des cobords de degré 1 pour la différentielle induite. Désignons par $(V \otimes C)^+$ l'espace vectoriel quotient $V \otimes C / U$. Il est clair qu'alors on a un isomorphisme d'algèbres $\Gamma \approx S((V \otimes C)^+)$.

Posons $W = V^*$. Alors on a l'isomorphisme canonique $S(W^*) = S^*(W)$ obtenu en étendant l'application qui à $\lambda \in W^*$ fait correspondre la forme 1-linéaire définie par λ .

Désignons par $(A \otimes W)_+$ le sous-espace vectoriel de $A \otimes W$, dual de $(V \otimes C)^+$. On a $S((V \otimes C)^+) \approx S^*((A \otimes W)_+)$.

Avec ces notations le morphisme d'évaluation

$$e : A \otimes S^*(W) \longrightarrow A \otimes S^*((A \otimes W)_+) = S^*((A \otimes W)_+, A)$$

est tel que, si $h \in S^*(W)$, $e(1 \otimes h)(a'_1 \otimes w_1, \dots, a'_p \otimes w_p) = \pm a'_1 \dots a'_p h(w_1, \dots, w_p)$. C'est l'expression que l'on trouve dans [9]. En effet, c'est l'unique morphisme de A -algèbres faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes S(V) & \xrightarrow{e} & A \otimes S((V \otimes C)^+) \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx \\ A \otimes S^*(W) & \longrightarrow & A \otimes S^*((A \otimes W)_+) \end{array}$$

En particulier si $\{a_i\}$ et $\{c_i\}$ sont les bases duales de A et C respectivement et si pour tout $h \in S^*(W)$ on définit $h_i \in S^*((A \otimes W)_+)$ par $h_i(a'_1 \otimes w_1, \dots, a'_p \otimes w_p) = \pm c_i(a'_1 \dots a'_p)h(w_1, \dots, w_p)$, on a $e(1 \otimes h) = \sum_i a_i \otimes h_i$.

On voit donc que le modèle $\mathcal{E}^*(L_+)$ est un modèle du type de Sullivan.

Fonctorialité du modèle de Sullivan. Soient

$\pi : A \longrightarrow E$ et $\pi' : A \longrightarrow E'$ deux fibrés sur A tels que $E = A \otimes S(V)$ et $E' = A \otimes S(V')$ comme A -algèbres, où V et V' sont de dimension finie en chaque degré et $V^p = V'^p = 0$ si $p \leq 1$. Supposons qu'il existe un quasi-isomorphisme de fibrés $\Psi : E \longrightarrow E'$. Alors il induit un quasi-isomorphisme de DG-algèbres $\psi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ des modèles de Sullivan.

Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que V se décompose en somme directe de trois sous-espaces $H(V) \oplus B \oplus C$ où $H(V)$ est le sous-espace formé des cycles relativement à la différentielle interne d_V de V qui ne sont pas des bords et où $d_V : C \longrightarrow B$ est un isomorphisme. Posons $W = B \oplus C$. On définit un morphisme de DG-algèbres

$$\Phi : A \otimes S(W) \longrightarrow E$$

en posant $\Phi(1 \otimes x) = d(1 \otimes y)$ si $x = d_V y \in B$ et $\Phi(1 \otimes y) = 1 \otimes y$ si $y \in C$ et en étendant en un morphisme de A -algèbres. Considérons E muni de la structure de DG-module/ $A \otimes S(W)$ induite par Φ . Alors $\mathcal{M}_\pi = K \otimes_{A \otimes S(W)} E$

est égale comme A -algèbre à $A \otimes S(H(V))$ et est en fait une DG-algèbre libre minimale sur A (puisque $V^1 = 0$ et que la différentielle est décomposable sur A). Considérons la projection naturelle

$$j : E \longrightarrow \mathcal{M}_\pi .$$

C'est un quasi-isomorphisme de fibrés . Pour le voir il suffit de montrer qu'elle induit un quasi-isomorphisme sur les fibres, car alors elle induira un isomorphisme des termes E_1 des suites spectrales associées à la filtration naturelle . Le morphisme qu'elle induit sur les fibres est la projection $S(V) \longrightarrow K \otimes_{S(W)} S(V) \cong S(H(V))$, où $S(V)$ est muni

de la structure de DG-module/ $S(W)$ induite par $\Phi^K : S(W) \longrightarrow S(V)$. Filtrons $S(V)$ et $S(H(V))$ par la longueur : on dira qu'un élément $v_1 \dots v_p$ est de filtration q si $p \geq q$. La projection $S(V) \longrightarrow S(H(V))$ est compatible avec cette filtration et elle induit un isomorphisme sur les termes E_1 des suites spectrales associées .

Comme $\mathcal{M}_\pi$ est libre minimale sur A , il existe un morphisme de DG-algèbres sur A

$$\rho : \mathcal{M}_\pi \longrightarrow E$$

tel que $j\rho = \text{identité}$. C'est évidemment un quasi-isomorphisme. Il en découle que le morphisme de DG-algèbres

$$\mathcal{M}_\pi \otimes S(W) \longrightarrow E ,$$

défini par $\xi \otimes w \longrightarrow \rho(\xi)\Phi(w)$, est un isomorphisme, car c'est un quasi-isomorphisme (puisque $S(W)$ est contractile) qui induit l'identité sur les générateurs .

Identifions E à $\mathcal{M}_\pi \otimes S(W)$ par cet isomorphisme .

Alors le morphisme de DG-algèbres/A

$$H = \text{id} \otimes h : E \longrightarrow E \otimes S(t, dt) ,$$

où $h : S(W) \longrightarrow S(W) \otimes S(t, dt)$ est l'homotopie définie par $w = dw' + w'' \longmapsto w \otimes t - (-1)^{\deg w} w' \otimes dt$, est une homotopie telle que $H_{t=0} = \text{id}_{\mathcal{M}_\pi} \otimes \varepsilon$, où $\varepsilon : S(W) \longrightarrow K$ est l'augmentation naturelle , et $H_{t=1} = \text{id}_E$.

Soient $\Gamma(E)$ et $\Gamma(\mathcal{M}_\pi)$ les modèles de Sullivan construits respectivement à partir de E et de $\mathcal{M}_\pi$. Alors, en appliquant la propriété universelle on obtient une et une seule homotopie $\tilde{h} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \otimes S(t, dt)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & A \otimes \Gamma(E) \\ H \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \tilde{h} \\ E \otimes S(t, dt) & \xrightarrow{e \otimes \text{id}} & A \otimes \Gamma(E) \otimes S(t, dt) . \end{array}$$

Par unicité de la propriété universelle, il en découle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\pi & \xrightarrow{e} & A \otimes \Gamma(\mathcal{M}_\pi) \\ j \nearrow & & \searrow \text{id} \otimes \tilde{j} \\ E & \xrightarrow{e} & A \otimes \Gamma(E) \\ H \downarrow \quad \nearrow H_{t=0} & & \downarrow \text{id} \otimes \tilde{h} \quad \nearrow \text{id} \otimes \tilde{h}_{t=0} \\ E \otimes S(t, dt) & \xrightarrow{e \otimes \text{id}} & A \otimes \Gamma(E) \otimes S(t, dt) \end{array}$$

où $\tilde{j}$ est le morphisme induit par j en appliquant la propriété universelle . En particulier , $\tilde{j} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}_K)$ est un

quasi-isomorphisme .

Si $\Psi : E \longrightarrow E'$ est un quasi-isomorphisme de fibrés (où E' est supposé de la forme $A \otimes S(V')$ comme A -algèbre) et $\psi : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E')$ est le morphisme induit, alors $\tilde{J}'\psi = \tilde{J}$, où $\tilde{J}' : \Gamma(E') \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}_\pi)$ est construit comme ci-dessus, et donc ψ est un quasi-isomorphisme .

HAEFLIGER [9] a démontré que le modèle de Sullivan représente le type d'homotopie rationnelle de la composante connexe de la section donnée, pour un fibré nilpotent. Ceci entraîne, compte tenu de la fonctorialité du modèle de Sullivan, le théorème suivant :

7.3. Théorème : Soit $p : X \longrightarrow Y$ un fibré de Serre muni d'une section et induit d'un fibré dont la base est 1-connexe .

Supposons que Y soit un complexe simplicial nilpotent de dimension finie et que $H^*(Y, \mathbb{Q})$ soit de dimension finie en chaque degré. Supposons de plus que la fibre Z soit 1-connexe et que $H^*(Z, \mathbb{Q})$ soit de dimension finie en chaque degré.

Soit A une DG-algèbre de dimension (totale) finie qui représente le type d'homotopie rationnelle de Y . Soit L une DG-algèbre de Lie/A qui représente le type d'homotopie rationnelle de p . Soit L_+ la sous-DG-algèbre de $\text{Lie}/\mathbb{Q}$ définie par $(L_+)_p = L_p$ si

$p \geq 1$, $(L_+)_0 = \text{Ker}(d : L_0 \longrightarrow L_{-1})$ et $(L_+)_p = 0$
si $p < 0$.

Alors ,

L_+ représente le type d'homotopie rationnelle de la composante connexe de la section donnée dans l'espace des sections continues de p .

7.4 . Corollaire : Gardons les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème et supposons de plus que la dimension de la base est inférieure à la connexité de la fibre . Alors l'homotopie rationnelle de l'espace des sections est un module sur la cohomologie rationnelle de la base .

Démonstration : On peut choisir une DG-algèbre de Lie L sur A positivement graduée qui représente le type d'homotopie rationnelle du fibré. Alors L , considérée comme DG-algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$, représente le type d'homotopie rationnelle de l'espace des sections . D'après Quillen (voir l'introduction) son homologie est isomorphe à l'homotopie rationnelle de l'espace des lacets sur l'espace des sections . Or, $H(L)$ est naturellement un $H(A)$ -module .

Application : Soit A une $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée (la différentielle est supposée nulle) de dimension finie et L une algèbre de Lie sur A (la différentielle est aussi supposée nulle), libre comme A -module et positivement graduée . Alors L est isomorphe (sur $\mathbb{Q}$) à l'homotopie rationnelle de l'espace des lacets sur l'espace des sections d'un fibré de Serre.

Exemples .

Nous allons appliquer le théorème ci-dessus aux exemples étudiés à la section 6 .

1. On voit que la composante connexe de l'application constante de S^2 dans S^2 a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,1) \times S^2$ alors que la composante connexe de l'identité $S^2 \xrightarrow{=} S^2$ a le même type d'homotopie que $K(Q,3)$.

2. L'espace des sections du fibré sur S^2 de fibre $K(Q,4) \times K(Q,9)$ défini par un crochet "tordu" a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,2) \times S^4 \times K(Q,9)$ (alors que l'espace des applications de S^2 dans $K(Q,4) \times K(Q,9)$ a le même type d'homotopie que $K(Q,2) \times K(Q,4) \times K(Q,7) \times K(Q,9)$.

3. L'espace des sections du fibré $E \longrightarrow S^3$ de fibre $S^5 \times S^7$ a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,2) \times K(Q,7)$ (alors que l'espace des applications de S^3 dans $S^5 \times S^7$ a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,2) \times K(Q,4) \times K(Q,5) \times K(Q,7)$)

4. La composante connexe de la section σ_0 dans l'espace des sections du fibré sur CP^2 de fibre CP^2 a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,3) \times K(Q,5)$ alors que la composante connexe de la section σ_a a le même type d'homotopie rationnelle que $K(Q,1) \times K(Q,2) \times K(Q,3) \times K(Q,5)$.

Remarque : La DG-algèbre de Lie L_+ possède en général des éléments non-nuls en degré zéro et de ce fait elle ne s'insère pas dans le dictionnaire (*) mentionné dans l'introduction . (D'ailleurs on trouve dans l'exemple 1 et 4 ci-dessus des composantes connexes qui ne sont pas simplement connexes) . L_+ représente néanmoins le type d'homotopie rationnelle de la composante connexe de la section donnée . En effet, dans le dictionnaire (*) , le foncteur $\mathcal{C}$ est bien défini sur les DG-algèbres de Lie ayant des éléments non-nuls en degré zéro et il transforme des quasi-isomorphismes en des quasi-isomorphismes . (C'est pour que le foncteur $\mathcal{L}$ transforme des quasi-isomorphismes en des quasi-isomorphismes que l'on doit supposer que les coalgèbres n'ont pas d'éléments non nuls en degré 1 , voir section 5 . Pour supprimer cette hypothèse il est nécessaire alors de faire une hypothèse supplémentaire sur les algèbres de Lie . Cette question est étudiée et résolue dans [11]).

8. QUESTIONS DE FINITUDE

Dans ce dernier chapitre nous nous intéressons aux trois questions suivantes qui se posent dans la théorie de l'homotopie rationnelle :

(i) Etant donné un complexe simplicial X de dimension finie n , existe-t-il une DG-algèbre A de dimension (totale) finie telle que $A^p = 0$ si $p > n$ et équivalente à la DG-algèbre $\Omega_P^*(X)$ des formes différentielles polynomiales sur X ? Ceci nous intéresse, en particulier, pour pouvoir appliquer le théorème (7.3) .

(ii) Etant donné une paire de complexes simpliciaux $Y \subset X$ de dimension finie, existe-t-il un morphisme surjectif de DG-algèbres $f : A \longrightarrow B$, où A et B soient de dimension finie et telles que $A^p = B^p = 0$ si $p > \dim X$, équivalent au morphisme $\Omega_P^*(X) \longrightarrow \Omega_P^*(Y)$ induit par l'inclusion $Y \subset X$ sur les formes différentielles polynomiales ? Ceci s'applique par exemple au calcul de la cohomologie de Gelfand-Fucks relatif [10] (pages 156-158) lorsque $Y \subset X$ est une paire de variétés différentielles compactes .

La question (ii) est l'analogue de (i) dans le cas relatif.

(iii) Dans quels cas un fibré de Serre $p : X \longrightarrow Y$ peut-il être représenté par un fibré $\pi : A \longrightarrow E$ sur une DG-algèbre A , tel que E (qui est un A -module libre) soit de dimension finie sur A ?

Nous verrons ci-dessous que les questions (i) et (ii)

ont une réponse affirmative lorsque les complexes simpliciaux sont connexes, nilpotents et leur homologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré . Quant à la question (iii) , faute de pouvoir donner une réponse générale, nous traiterons un exemple important .

Modèle fini pour un complexe simplicial fini ([8], page 517).

8.1 Proposition : Soit X un complexe simplicial de dimension finie n , nilpotent et tel que $H(X, \mathbb{Q})$ soit de dimension finie en chaque degré . Alors il existe une DG-algèbre A de dimension finie équivalente à $\Omega_P^*(X)$.

8.2 Lemme : Soit A une DG-algèbre telle que $A^0 = K$ et $H^p(A) = 0$ si $p > n$. Soit I le sous-DG-espace vectoriel de A formé des éléments de degré $> n$ et des éléments de degré n qui forment un complément des n -cocycles de A^n . Alors I est un idéal de A et la projection $A \longrightarrow A/I$ est un quasi-isomorphisme .

La démonstration du lemme est immédiate .

Démonstration de 8.1 : Soit $\mathcal{M}_X$ le modèle libre minimal nilpotent de $\Omega_P^*(X)$. On a $\mathcal{M}_X^0 = K$, $\mathcal{M}_X$ est de dimension finie en chaque degré et $H^p(\mathcal{M}_X) = 0$ si $p > n$. On prend alors $A = \mathcal{M}_X / I$, où I est un idéal comme dans le lemme et on a des quasi-isomorphismes de DG-algèbres $\mathcal{M}_X / I \longleftarrow \mathcal{M}_X \longrightarrow \Omega_P^*(X)$

Modèle fini pour une paire de complexes simpliciaux finis .

8.3 : Proposition : Soit X un complexe simplicial de dimension finie n , connexe et nilpotent tel que $H(X, \mathbb{Q})$ soit de dimension finie en chaque degré. Soit $Y \subset X$ un sous-complexe simplicial tel qu'il existe une DG-algèbre $\tilde{B}$ de dimension finie en chaque degré et telle que $\tilde{B}^0 = K$, équivalente à $\Omega_P^*(Y)$. Alors il existe un morphisme surjectif de DG-algèbres $f : A \longrightarrow B$ équivalent à $\Omega_P^*(X) \longrightarrow \Omega_P^*(Y)$ tel que A et B soient de dimension finie et $A^p = B^p = 0$ si $p > n$.

Pour la démonstration nous avons besoin des lemmes suivants :

8.4 Lemme : Soient n un entier > 0 , A et B deux DG-algèbres telles que $H^p(A) = H^p(B) = 0$ si $p > n$ et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme surjectif de DG-algèbres . Supposons que $H^n(f) : H^n(A) \longrightarrow H^n(B)$ soit surjectif . Alors il existe deux DG-algèbres A' et B' telles que $A'^p = B'^p = 0$ si $p > n$, deux projections $p_A : A \longrightarrow A'$ et $p_B : B \longrightarrow B'$ qui sont des quasi-isomorphismes et un morphisme surjectif de DG-algèbres $f' : A' \longrightarrow B'$ tel que $p_B f = f' p_A$.

Démonstration : le fait que $H^n(f)$ soit surjectif et $H^p(A) = H^p(B) = 0$ si $p > n$ entraîne que f est une surjection des n -cocycliques de A sur les n -cocycles de B . Alors, étant donné un complément U des n -cocycles de B , on peut choisir un complément V des n -cocycles de A tel que $f(V) \subset U$. On

applique alors (8.2) et on passe aux quotients .

8.5 Lemme : Soient n un entier ≥ 0 , A et B deux DG-algèbres de dimension finie en chaque degré telles que $H^p(A) = H^p(B) = 0$ si $p > n$. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de DG-algèbres tel que $H^n(f) : H^n(A) \longrightarrow H^n(B)$ soit surjectif . Alors il existe un morphisme surjectif de DG-algèbres $f' : A' \longrightarrow B'$ équivalent à f tel que A' et B' soient de dimension finie et $A'^p = B'^p = 0$ si $p > n$.

Démonstration : Soient $B^\#$ l'espace vectoriel gradué sous-jacent à B et $S(B^\# \oplus sB^\#)$ l'algèbre libre sur $B^\# \oplus sB^\#$ munie de la différentielle définie par $db = sb$. On a $H(S(B^\# \oplus sB^\#)) = K$. Soit $\tilde{A} = A \otimes S(B^\# \oplus sB^\#)$. Alors l'inclusion $\tilde{\iota} : A \longrightarrow \tilde{A}$ est un quasi-isomorphisme et le morphisme $\tilde{f} : \tilde{A} \longrightarrow B$ défini par $\tilde{f}(a) = f(a)$, $a \in A$, $\tilde{f}(b) = b$, $\tilde{f}(sb) = db$, $b \in B$, est surjectif et tel que $\tilde{f}\tilde{\iota} = f$. $\tilde{A}$ est de dimension finie en chaque degré et $H^n(\tilde{f})$ est surjectif . On applique alors (8.4) en remplaçant f par $\tilde{f}$ pour obtenir $f' : A' \longrightarrow B'$.

Démonstration de 8.3 : Soit $\mathcal{M}_X$ le modèle minimal de Sullivan de $\Omega_P^*(X)$. On a un morphisme $f : \mathcal{M}_X \longrightarrow \tilde{B}$ équivalent à $\Omega_P^*(X) \longrightarrow \Omega_P^*(Y)$, car si $B' \longrightarrow \Omega_P^*(Y)$ est un quasi-isomorphisme de DG-algèbres , alors le morphisme $\mathcal{M}_X \longrightarrow \Omega_P^*(X) \longrightarrow \Omega_P^*(X)$ se relève (à homotopie près) en un morphisme $\mathcal{M}_X \longrightarrow B'$ ([6], page 252) . On a $H^p(\mathcal{M}_X) = H^p(B) = 0$ si $p > n$. Reste à voir que $H^n(f)$ est surjectif pour appliquer le lemme (8.5). Or, en appliquant le théorème de de Rham [14]

(Théorème 7.1 page 297) , on voit que $H^n(\Omega_P^*(X)) \longrightarrow H^n(\Omega_P^*(X))$ est surjective, car tout n -cycle de Y non homologue à zéro est un n -cycle de X non homologue à zéro .

Une condition nécessaire pour l'existence d'un modèle de dimension finie .

8.6 Proposition : Soit $p : X \longrightarrow Y$ un fibré de Serre où Y est 1-connexe . Soit $\alpha : A \longrightarrow B$ un morphisme de DG-algèbres équivalent au morphisme $\gamma : A^*(Y) \longrightarrow A^*(X)$ induit par p , tel que $A^0 = Q$, $A^1 = 0$.

Supposons qu'il existe un fibré $\pi : A' \longrightarrow E$ sur une DG-algèbre A' avec $A'^0 = Q$ et $A'^1 = 0$, qui représenté le type d'homotopie rationnelle de p et tel que E soit un module de dimension finie . Alors $\text{Tor}^A(Q, B)$ est un espace vectoriel de dimension finie .

C'est une conséquence directe de (3.7) et (3.8) .

Exemple de fibré ayant un modèle de dimension finie .

Définition : Soit A une algèbre . Une suite finie d'éléments $a_1, \dots, a_n$ de A est dite régulière si a_1 n'est pas diviseur de zéro dans A et si la classe de a_1 n'est pas diviseur de zéro dans le quotient de A par l'idéal engendré par $a_1, \dots, a_{i-1}$, $i > 1$.

8.7 Proposition : Soient G un groupe de Lie connexe et compact et H un sous-groupe fermé dans G . Soient $p : BH \longrightarrow BG$ le fibré de fibre G/H et $\rho : \mathcal{M}_{BG} \longrightarrow \mathcal{M}_{BH}$ le morphisme de DG-algèbre induit par p sur les modèles libres minimaux de BG et BH . Soient n le rang de G et m le rang de H . Supposons qu'il existe une base $x_1, \dots, x_n$ des générateurs de $\mathcal{M}_{BG}$ telle que $\rho x_1, \dots, \rho x_m$ soit une suite régulière dans $\mathcal{M}_{BH}$. Alors il existe un fibré $\pi : \mathcal{M}_{BG} \longrightarrow E$ quasi-isomorphe à ρ et tel que E soit un $\mathcal{M}_{BG}$ -module de dimension finie .

Démonstration : On a $\mathcal{M}_{BG} = H^*(BG, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{M}_{BH} = H^*(BH, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ (algèbres de polynômes , x_1 et y_1 de degré pair > 0 et différentielle triviale) et $\rho = H^*(p)$ [4] (page 60) .

Si $m = n$, d'après un théorème classique [1] (3.5 page 25 et et 3.9 page 27) les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\rho x_1, \dots, \rho x_n$ est une suite régulière dans $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$
- (2) $\text{Tor}^{\mathcal{M}_{BG}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_{BH})$ est de dimension finie ; et
- (3) $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$ est un $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ -module libre de dimension finie .

Supposons $n > m$. Alors ρ se factorise par

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m] \\
 \searrow \rho' & & \nearrow \rho'' \\
 & \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n] &
 \end{array}$$

où ρ' et ρ'' sont définis par $\rho'x_1 = \rho x_1$ si $1 \leq m$,
 $\rho'x_1 = x_1$ si $1 > m$, $\rho''\xi = \xi$ si $\xi \in Q[y_1, \dots, y_m]$,
 $\rho''x_1 = \rho x_1$ si $1 > m$.

La suite $\rho'x_1, \dots, \rho'x_n$ est régulière dans
 $Q[y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n]$ qui est donc un $Q[x_1, \dots, x_n]$ -
 module libre de dimension finie.

Soit $\Lambda(u_{m+1}, \dots, u_n)$ l'algèbre extérieure engendrée
 par $n - m - 1$ éléments avec $\deg u_1 = \deg x_1 - 1$ et
 $E = Q[y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n] \otimes \Lambda(u_{m+1}, \dots, u_n)$ munie
 de la différentielle définie par $du_1 = x_1 - \rho x_1$. E est un
 $Q[x_1, \dots, x_n]$ - module (avec la structure induite par $\rho' \otimes 1$)
 libre de dimension finie.

Soient $i : Q[y_1, \dots, y_m] \longrightarrow E$ l'inclusion naturelle
 et $\eta : E \longrightarrow Q[y_1, \dots, y_m]$ la projection naturelle. On a
 $\eta i = \text{id}$ et $i\eta$ est homotope à l'identité. En effet, le mor-
 phisme $H : E \longrightarrow E \otimes S(t, dt)$ défini par $H(y_1) = y_1$,
 $H(x_1) = tx_1 + dtu_1 + (1 - t)\rho x_1$ et $H(u_1) = tu_1$ est une homo-
 topie (au sens de [6], page 251/252) entre $i\eta$ et l'identité.
 D'où la proposition.

On a ainsi une démonstration élémentaire des deux faits
 connus suivants :

8.8 : Corollaire : Sous les mêmes hypothèses que dans
 la proposition, on a $H^*(G/H, Q) = Q \otimes E$ ([4], page
 70). En particulier, G/H est $\mathcal{M}_{BG}$
 un espace formel ([14], page 317).

Démonstration : Avec les notations ci-dessus, soit

$\bar{E} = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m] \otimes \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_n)$ avec $du_1 = x_1 - \rho x_1$. Alors ([4], page 68) $H^*(G/H, \mathbb{Q}) = H(\mathbb{Q} \otimes_{\mathcal{M}_{BG}} \bar{E})$

Or, la projection $\bar{E} \longrightarrow \mathcal{M}_{BH} = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ est un quasi-isomorphisme. (Pour le voir, on peut par exemple définir une homotopie analogue à celle définie dans la démonstration de la proposition). En composant avec l'inclusion on obtient un quasi-isomorphisme $\bar{E} \longrightarrow E$ et donc un quasi-isomorphisme

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathcal{M}_{BG}} E \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathcal{M}_{BG}} E. \text{ Or la différentielle induite sur}$$

$\mathbb{Q} \otimes_{\mathcal{M}_{BG}} E$ est nulle car si $\rho x_1, \dots, \rho x_m$ est une suite régulière,

$\rho x_1, \dots, \rho x_m$ sont algébriquement indépendants et en particulier si $i > m$, ρx_i est élément de l'idéal engendré par $\rho x_1, \dots, \rho x_m$. D'où le corollaire.

Paires de Cartan.

Gardons les notations des démonstrations ci-dessus et soit U l'espace vectoriel gradué de base $u_1, \dots, u_n$. Soit U_ρ le sous-espace vectoriel gradué de U formé des $u \in U$ tels que $du = \alpha_1 du'_1 + \dots + \alpha_s du'_s$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m] =$ idéal d'augmentation et $u'_1 \in U$. U_ρ est appelé le sous-espace de Samelson de U ([4], page 70).

Soit $k = \dim U_\rho$. Soit $u_1, \dots, u_n$ une base de U telle que $u_{n-k+1}, \dots, u_n$ soit une base de U_ρ . Soient $x_1, \dots, x_n$ les générateurs correspondants de $\mathcal{M}_{BG}$. Considérons le produit $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m] \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_n)$. On le désignera par

A lorsqu'il est muni de la différentielle définie par $dy_1 = 0$, $du_1 = -\rho x_1$ si $i \leq n-k$ et $du_1 = 0$ si $i > n-k$, et par A' lorsqu'il est muni de la différentielle définie par $d'y_1 = 0$ et $d'u_1 = -\rho x_1$, $i = 1, \dots, n$. On définit un morphisme de DG-algèbres $\varphi : A \longrightarrow A'$ en posant pour $\alpha \in K[y_1, \dots, y_m]$

$$\varphi(\alpha \otimes u_1) = \begin{cases} \alpha \otimes u_1 & \text{si } i \leq n-k \\ \alpha \otimes u_1 - \sum_{t=1}^{n-k} \alpha \alpha_t \otimes u_t & \text{si } i > n-k \text{ et } du_1 = \sum_{t=1}^{n-k} \alpha_t d_t. \end{cases}$$

et en étendant en un morphisme d'algèbres. On vérifie directement que c'est un isomorphisme de DG-algèbres, le morphisme inverse étant donné par

$$\varphi^{-1}(\alpha \otimes u_1) = \begin{cases} \alpha \otimes u_1 & \text{si } i \leq n-k \\ \alpha \otimes u_1 + \sum_{t=1}^{n-k} \alpha \alpha_t \otimes u_t & \text{si } i > n-k \text{ et } du_1 = \sum \alpha_t du_t \end{cases}$$

Il en découle que $\text{Tor}^{\mathcal{M}_{BG}}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_{BH}) \simeq \text{Tor}^{\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n-k}]}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_{BH}) \otimes \Lambda(u_{n-k}, \dots, u_m)$. En particulier

$\text{Tor}^{\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n-k}]}(\mathbb{Q}, \mathcal{M}_{BH})$ est de dimension finie et donc (d'après [1], 3.5 et 3.9) $\rho x_1, \dots, \rho x_{n-k}$ est une suite régulière dans $\mathcal{M}_{BH}$.

On dit que G et H sont une paire de Cartan si $n - m = k$. Dans ce cas on peut donc appliquer la proposition.

Les sphères et les espaces projectifs, ou plus généralement les variétés de Stiefel et les Grassmanniennes sont des

espaces homogènes correspondant à des paires de Cartan .

Si H est un tore maximal dans G , alors G et H sont une paire de Cartan .

Exemple d'une paire qui n'est pas de Cartan .

Il existe des espaces homogènes qui ne correspondent pas à des paires de Cartan mais auxquels on peut appliquer la proposition .

Considérons $SU(5)$ comme sous-groupe de $S_p(5)$. On a ([1] , page 37) $\mathcal{M}_{BSU(5)} = \mathbb{Q}[y_4, y_6, y_8, y_{10}]$,
 $\mathcal{M}_{BS_p(5)} = \mathbb{Q}[x_4, x_8, x_{12}, x_{16}, x_{20}]$ (les indices désignent les degrés) et $\rho : \mathcal{M}_{BS_p(5)} \longrightarrow \mathcal{M}_{BSU(5)}$ est défini par
 $\rho x_4 = y_4$, $\rho x_8 = y_8$, $\rho x_{12} = y_6^2$, $\rho x_{16} = y_6 y_{10}$ et $\rho x_{20} = y_{10}^2$.
 On vérifie que l'espace de Samelson est nul. Cependant,
 ρx_4 , ρx_8 , ρx_{12} , ρx_{20} est une suite régulière dans $\mathcal{M}_{BSU(5)}$,
 car $K[y_4, y_6, y_8, y_{10}] / (y_4, y_8, y_6^2, y_{10}^2)$ est un espace vectoriel de dimension 4 .

Un contre-exemple .

Ce n'est pas vrai, en général, que si $A = K[x_1, \dots, x_n]$ et $B = K[y_1, \dots, y_m]$ sont des algèbres de polynômes en des indéterminées de degré pair > 0 et $\rho : A \longrightarrow B$ est un morphisme

d'algèbres tel que $\text{Tor}^A(K, B)$ soit de dimension finie (et donc en particulier $n \geq m$) , alors (quitte à faire un changement linéaire homogène des x_i ou simplement à les renuméroter) on ait que $\{\rho x_1, \dots, \rho x_m\}$ soit une suite régulière dans B , comme le montre l'exemple suivant (dû à M. KERVAIRE) :

$A = K[x_6, x_{10}, x_{14}]$, $B = K[y_2, z_2]$ (les indices indiquant les degrés) et $\rho : A \longrightarrow B$ défini par $\rho x_6 = y_2(y_2^2 - z_2^2)$, $\rho x_{10} = y_2^4(y_2 + 2z_2)$ et $\rho x_{14} = (y_2 + 2z_2)(y_2 + z_2)(y_2^5 - z_2^5)$. Par raison de degrés, il n'y a pas de changement linéaire possible des variables. On vérifie qu'aucun des quotients

$B / (\rho x_6, \rho x_{10})$, $B / (\rho x_6, \rho x_{14})$, $B / (\rho x_{10}, \rho x_{14})$ n'est de dimension finie , bien que $\text{Tor}^A(K, B)$ soit de dimension finie .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BAUM, P.F., On the Cohomology of homogeneous spaces,
Topology, Vol. 7, No 1, 1968, p. 15 à 38.
- [2] BOURBAKI, N., Algèbre III, Hermann, Paris, 1970 .
- [3] BOURBAKI, N., Groupes et algèbres de Lie II, Hermann,
Paris, 1972.
- [4] CARTAN, H., La transgression dans un groupe de Lie
et dans un espace fibré principal, Colloque
de Topologie (espaces fibrés), Bruxelles,
1950, p. 57 à 71 .
- [5] CARTAN, H., Séminaire Cartan, Exposé 3, E.N.S.,
7ème année, 1954/55 .
- [6] DELIGNE, P., GRIFFITHS, P., MORGAN, J., SULLIVAN, D.,
The real homotopy of Kähler Manifolds, Inv.
Math., vol. 29, 1975, p. 245 à 274 .
- [7] GRIVEL, P.-P., Formes différentielles et suites spec-
trales, à paraître dans les Annales de
l'Institut Fourier.
- [8] HAEFLIGER, A., Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie
des champs de vecteurs, Ann. Scient. E.N.S.,
4ème année, t.9, 1976, p. 503 à 532.
- [9] HAEFLIGER, A., Rational homotopy type of the space
of sections . A paraître .

- [10] HAEFLIGER, A., On the Gelfand-Fuks cohomology,
L'Enseignement Math., T. XXIV, fasc. 1-2,
1978, p. 143 à 160 .
 - [11] NEISENDORFER, J., Lie algebras, coalgebras and
rational homotopy theory for nilpotent
spaces, Pacific Journal of Math., vol. 74,
No 2, 1978, p. 429 à 460 .
 - [12] QUILLEN, D., Rational homotopy theory, Ann. of
Math., vol. 90, 1969, p. 205 à 295 .
 - [13] SMITH, L., Homological algebra and the Eilenberg-
Moore spectral sequence, Trans. Amer. Math.
Soc., vol. 129, 1967, p. 58 à 93 .
 - [14] SULLIVAN, D., Infinitesimal computations in topology,
I.H.E.S., Publ. Math., No 47, 1977, p.269
à 331 .
 - [15] THOM, R. L'homologie des espaces fonctionnels .
Colloque de Topologie Algébrique, GBRM, Louvain
Louvain, 1956, p. 29 à 39 .
 - [16] WATKISS, C., The nilpotent model for a function space,
Publ. du Dept. Math., Lyon 1, 1976, t. 13-4
p. 73 à 85 .
-

